Essec II 2018 - Option économique - Correction

Partie I : Modèle de population saisonnière

$T \in \mathbb{N}^*$ = durée maximal de la saison.
τ est la variable aléatoire égale à la durée de la saison. Ainsi, $\tau(\Omega) = [\![1, T]\!]$ et $[\tau = t] =$« la saison s'arrête à la date t »

A un instant t :

- la génération d'insectes s'éteint en déposant des œufs
- $N(t)$ = nombre moyen d'œufs produits à l'instant t.
  Un individu produit en moyenne α œufs, avec $\alpha > 0$.
- $p(t)$ = proportion des œufs pondus à l'instant t qui rentrent en diapause.
- Les œufs qui ne sont pas entrés en diapause éclosent à $t+1$.
- $D(t)$ = nombre d'œufs en diapause à l'instant t

On a $D(0) = 0$; $N(0) \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [\![0, T-1]\!]$, $0 < p(t) \leqslant 1$

1. a) $D(t+1)$ est le nombre d'œufs en diapause à l'instant $t+1$
   Il est égal au nombre d'œufs qui étaient en diapause à l'instant t ($=D(t)$) plus ceux qui rentrent en diapause à l'instant $t+1$ ($=p(t) \times N(t)$).
   En effet, à la date t, il y a en moyenne $N(t)$ œufs pondus et la proportion des œufs pondus à qui rentrent en diapause est $p(t)$.

   $\boxed{D(t+1) = D(t) + p(t)N(t), \qquad \forall t \in [\![0, T-1]\!]}$

   b) $N(t+1)$ est le nombre moyen d'œufs pondus à l'instant $t+1$.
   Un individu produit en moyenne α œufs.
   Le nombre d'individus à l'instant $t+1$ est égal au nombre d'œufs qui ont éclos c'est-à-dire $[1-p(t)]N(t)$. En effet, sur les $N(t)$ œufs pondus à la date t, la proportion de ceux qui éclosent est $1-p(t)$.

   $\boxed{N(t+1) = \alpha[1-p(t)]N(t), \qquad \forall t \in [\![0, T-1]\!]}$

2. On suppose $\alpha \leqslant 1$.

   a) $\forall t \in [\![0, T-1]\!]$, on a $N(t+1) = \alpha[1-p(t)]N(t)$.
   Or $0 < p(t) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant 1 - p(t) < 1$ et $0 < \alpha \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \alpha[1-p(t)] \leqslant 1$.

   Ainsi, $\boxed{N(t+1) \leqslant N(t), \qquad \forall t \in [\![0, T-1]\!]}$

   b) $\forall t \in [\![0, T-1]\!]$, $\quad N(t+1) = \alpha[1-p(t)]N(t) \leqslant (1-p(t))N(t)$ car $\alpha \leqslant 1$
   $D(t+1) = D(t) + p(t)N(t)$

   Donc $D(t+1) + N(t+1) \leqslant D(t) + p(t)N(t) + (1-p(t))N(t)$

   $\boxed{D(t+1) + N(t+1) \leqslant D(t) + N(t), \qquad \forall t \in [\![0, T-1]\!]}$

   c) Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(t)$: « $D(t) + N(t) \leqslant N(0)$ » est vraie $\forall t \in [\![0, T]\!]$

   Pour $t = 0$: $D(0) = 0$ donc $D(0) + N(0) = N(0) \leqslant N(0)$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie

   Soit $t \in [\![0, T-1]\!]$. Supposons que $\mathcal{P}(t)$ est vraie.
   $D(t+1) + N(t+1) \leqslant D(t) + N(t) \leqslant N(0)$: $\mathcal{P}(t+1)$ est vraie

   $\boxed{\forall t \in [\![0, T]\!],\ D(t) + N(t) \leqslant N(0)}$

   d) $\forall t \in [\![0, T]\!]$, $N(t) \geqslant 0$ donc $D(t) \leqslant D(t) + N(t)$.

   D4après 2c), on a donc $\boxed{\forall t \in [\![0, T]\!],\ D(t) \leqslant N(0)}$

   e) On suppose que $p(0) = 1$
   i) Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(t)$: « $N(t) = 0$ » est vraie $\forall t \in [\![1, T]\!]$

   Pour $t = 1$: $N(1) = \alpha(1-p(0))N(0) = 0$ car $p(0) = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie

   Soit $t \in [\![1, T-1]\!]$. Supposons que $\mathcal{P}(t)$ est vraie : $N(t) = 0$
   $N(t+1) = \alpha(1-p(t))N(t) = 0$: $\mathcal{P}(t+1)$ est vraie

   $\boxed{\forall t \in [\![1, T]\!],\ N(t) = 0}$

   ii) $\forall t \in [\![0, T-1]\!]$, $D(t+1) = D(t) + p(t)N(t) = D(t)$
   D est stationnaire à partir de $t = 1$.
   Or $D(1) = D(0) + p(0)N(0) = 0 + 1.N(0) = N(0)$

   Donc $\boxed{\forall t \in [\![1, T]\!],\ D(t) = N(0)}$

   <u>Autre méthode</u> :
   Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(t)$: « $D(t) = N(0)$ » est vraie $\forall t \in [\![1, T]\!]$

   Pour $t = 1$: $D(1) = D(0) + p(0)N(0) = 0 + 1.N(0) = N(0)$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie

   Soit $t \in [\![1, T-1]\!]$. Supposons que $\mathcal{P}(t)$ est vraie : $D(t) = N(0)$
   $D(t+1) = D(t) + p(t)N(t) = D(t) = N(0)$: $\mathcal{P}(t+1)$ est vraie

   $\boxed{\forall t \in [\![1, T]\!],\ D(t+1) = D(t) + p(t)N(t) = D(t)}$

   iii) Le but est de maximiser le nombre d'œufs en diapause ie $D(t)$.
   Or d'après 2d) $D(t) \leqslant N(0)$ et d'après 2e), ce majorant est atteint si $p(0) = 1$.
   Donc la meilleure stratégie est d'avoir $p(0) = 1$ c'est-à-dire que

   $\boxed{\text{les } N(0) \text{ œufs entrent en diapause immédiatement}}$.

3. **On suppose jusqu'à la fin que $\alpha > 1$.**

   τ VA finie à valeurs dans $[\![1, T]\!]$ et on suppose que $P(\tau = t) > 0$, $\forall t \in [\![1, T]\!]$.

   a) $(\tau = t) \subset (\tau \geqslant t)$ donc $P(\tau = t) \leqslant P(\tau \geqslant t)$. Comme $P(\tau = t) > 0$, $\boxed{P(\tau \geqslant t) > 0}$

   On définit $\boxed{H(t) = P_{[\tau \geqslant t]}(\tau = t)}$

b) $H(t) = P_{[\tau \geqslant t]}(\tau = t) = \dfrac{P(\tau \geqslant t) \cap (\tau = t)}{P(\tau \geqslant t)}$ donc $\boxed{H(t) = \dfrac{P(\tau = t)}{P(\tau \geqslant t)}}$

c) $H(T) = \dfrac{P(\tau = T)}{P(\tau \geqslant T)} = \dfrac{P(\tau = T)}{P(\tau = T)}$ car $\tau(\Omega) = [\![1, T]\!]$ donc $\boxed{H(T) = 1}$

d) Si $\tau \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, T]\!])$, $P(\tau = t) = \frac{1}{T}$ $\forall t \in [\![1, T]\!]$.

$$P(\tau \geqslant t) = \sum_{k=t}^{T} P(\tau = k) = \sum_{k=t}^{T} \frac{1}{T} = (T - t + 1) \times \frac{1}{T}$$

Or $H(t) = \dfrac{P(\tau = t)}{P(\tau \geqslant t)}$ donc $\boxed{H(t) = \dfrac{1}{T - t + 1}}$

e) Soit $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_T = 1$ et $q_1 = \lambda_1 = \lambda_1 - \lambda_0, \ldots, q_T = \lambda_T - \lambda_{T-1}$

i) $\forall i \in [\![1, T]\!]$, $q_i = \lambda_i - \lambda_{i-1} > 0$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{T} q_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) = \lambda_n - \lambda_0 = 1 - 0 = 1$ par télescopage

OU :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{T} q_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \text{ en posant } k = i - 1 \\
&= \cancel{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i} + \lambda_n - \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k} + \lambda_0 \right) \\
&= \lambda_n - \lambda_0 = 1 - 0 = 1
\end{aligned}$$

Donc $q_i \leqslant 1$ (ou $q_i = \lambda_i - \lambda_{i-1} \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_n \leqslant 1$)

$\boxed{(q_i)_{1 \leqslant i \leqslant T} \text{ définit une loi de probabilité sur } [\![1, T]\!]}$

ii) Si τ suit la loi précédente, on a $P(\tau = i) = q_i = \lambda_i - \lambda_{i-1}$,

$$P(\tau \geqslant t) = \sum_{i=t}^{T} P(\tau = i) = \sum_{i=t}^{T} q_i = \sum_{i=t}^{T} \lambda_i - \lambda_{i-1} = \lambda_T - \lambda_{t-1} = 1 - \lambda_{t-1}$$

Or $H(t) = \dfrac{P(\tau = t)}{P(\tau \geqslant t)}$ donc $\boxed{H(t) = \dfrac{\lambda_t - \lambda_{t-1}}{1 - \lambda_{t-1}}, \forall t \in [\![1, T]\!]}$

iii) On suppose que $T \geqslant 2$ et que $\forall n \in [\![1, T]\!]$, $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant \lambda_n - \lambda_{n-1}$
Alors si $t \in [\![1, T - 1]\!]$, $\lambda_n - \lambda_{n-1} \leqslant \lambda_{n+1} - \lambda_n$
et $\lambda_{n-1} < \lambda_n$ donc $1 - \lambda_{n-1} > 1 - \lambda_n$ d'où $\dfrac{1}{1 - \lambda_{n-1}} < \dfrac{1}{1 - \lambda_n}$.

Tous les termes étant positifs, $\dfrac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{1 - \lambda_{n-1}} < \dfrac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{1 - \lambda_n}$ ie $H(n) \leqslant H(n + 1)$

$\boxed{t \mapsto H(t) \text{ est croissante sur } \{1, 2, \ldots, T\}}$.

On suppose désormais que H est croissante. Le but est de maximiser $E(\ln(D(\tau))$.

4. Etude d'un exemple simple : $T = 2$, $H(1) = \frac{1}{2}$, $H(2) = 1$, $\alpha = 4$.

a) i) D'après 3b) $H(1) = \dfrac{P(\tau = 1)}{P(\tau \geqslant 1)} = P(\tau = 1)$ car $\tau(\Omega) = \{1, 2\}$. Comme $H(1) = \frac{1}{2}$,

$\boxed{P(\tau = 1) = \frac{1}{2}}$

ii) $\tau(\Omega) = \{1, 2\}$ et $P(\tau = 1) = \frac{1}{2} = P(\tau = 2)$ donc $\boxed{\tau \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1, 2\}).}$

b) Si $D(1)$ et $N(1)$ sont fixés, comme $D(2) = D(1) + P(1)N(1)$, le maximum est atteint si $p(1)$ est maximal ie si $\boxed{p(1) = 1}$

c) On suppose $p(1) = 1$. Rappel : $D(t + 1) = D(t) + p(t)N(t)$
$N(t + 1) = \alpha[1 - p(t)]N(t)$

D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
E(\ln D(\tau)) &= \ln(D(1))P(\tau = 1) + \ln(D(2))P(\tau = 2) \\
&= \tfrac{1}{2} \ln(D(1)) + \tfrac{1}{2} \ln[D(1) + p(1)N(1)] \\
&= \tfrac{1}{2} \ln(D(1)) + \tfrac{1}{2} \ln[D(1) + N(1)]
\end{aligned}$$

Or $D(1) = p(0)N(0)$ car $D(0) = 0$
et $N(1) = 4[1 - p(0)]N(0)$ car $\alpha = 4$ donc $D(1) + N(1) = [4 - 3p(0)]N(0)$

$\boxed{E(\ln D(\tau)) = \frac{1}{2} \ln p(0)N(0) + \frac{1}{2} \ln[4 - 3p(0)]N(0)}$

d) φ est définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(x) = \frac{1}{2} \ln \Big((4 - 3x)N(0) \Big) + \frac{1}{2} \ln \Big(N(0)x \Big)$.

$\varphi(x) = \frac{1}{2} \ln(4 - 3x) + \frac{1}{2} \ln(x) + \ln N(0)$.

φ est dérivable sur $]0, 1]$

$\forall x \in [0, 1]$, $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{-3}{4 - 3x} + \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{-3x + 4 - 3x}{x(4 - 3x)} = \dfrac{2 - 3x}{x(4 - 3x)}$

Or $x \in]0, 1]$ donc $x > 0$ et $4 - 3x > 0$

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(\frac{2}{3})$	$\searrow$	$\ln N(0)$

$\varphi(\frac{2}{3}) = \frac{1}{2} \left(\ln 2 \ln \frac{2}{3} \right) + \ln N(0) = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3} + \ln N(0)$

e) φ atteint son maximum en $\frac{2}{3}$ donc $\boxed{E\big(\ln(D(\tau))\big) \text{ atteint son maximum en } p^*(0) = \frac{2}{3}}$

Partie II : Transformation du problème

Par convention, $\sum_{t=1}^{0} h(t) = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} &D(t+1) = D(t) + p(t)N(t) \\ &N(t+1) = \alpha[1-p(t)]N(t) = \alpha N(t) - \alpha p(t)N(t) \\ &D(0) = 0,\ \alpha > 1 \end{aligned}}$$

5. Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(t)$: « $D(t) + N(t) > 0$ » est vraie $\forall t \in [\![0, T]\!]$

   Pour $t = 0$: $D(0) + N(0) = N(0) > 0$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie

   Soit $t \in [\![0, T-1]\!]$. Supposons que $\mathcal{P}(t)$ est vraie. En omettant les (t), $D + N > 0$

   $D(t+1) + N(t+1) = D + pN + \alpha(1-p)N$

   Comme $D \geqslant 0$ et $n \geqslant 0$, on a $D > 0$ ou $N > 0$.

   • Si $D > 0$, alors comme $pN \geqslant 0$ et $\alpha(1-p)N \geqslant 0$, $D(t+1) + N(t+1) \geqslant D + 0$
   • Si $D = 0$, alors $N > 0$ et $D(t+1) + N(t+1) = \alpha N > 0$
   $\mathcal{P}(t+1)$ est vraie

   $\boxed{\forall t \in [\![0, T]\!],\ D(t) + N(t) > 0}$

On pose $\boxed{X(t) = \dfrac{D(t)}{D(t) + N(t)}}$ donc $D = X(D+N)$

6. Soit $t \in [\![0, T-1]\!]$. En omettant les (t) pour alléger les notations,

$$X(t+1) = \frac{D(t+1)}{D(t+1) + N(t+1)} = \frac{D + pN}{D + pN + \alpha(1-p)N}$$

$$\begin{aligned} C \quad &= \frac{p + (1-p)X}{p + \alpha(1-p) + (1-\alpha)(1-p)X} \\ &= \frac{p(D+N) + (1-p)X(D+N)}{p(D+N) + \alpha(1-p)(D+N) + (1-\alpha)(1-p)X(D+N)} \\ &= \frac{pD + pN + (1-p)D}{pD + pN + \alpha(1-p)(D+N) + (1-\alpha)(1-p)D} \\ &= \frac{pN + D}{pD + pN + \alpha(1-p)N + (1-p)D} \end{aligned}$$

$$\boxed{X(t+1) = \frac{p(t) + [1-p(t)]X(t)}{p(t) + \alpha[1-p(t)] + [1-\alpha][1-p(t)]X(t)},\ \forall t \in [\![0, T-1]\!]}$$

7. Soit $\xi \in [0,1]$. Pour $x \in [0,1]$ on pose $\boxed{\psi_\xi(x) = \dfrac{x + (1-x)\xi}{x + \alpha(1-x) + (1-\alpha)(1-x)\xi}}$

   a) $\psi_\xi(x) = \dfrac{(1-\xi)x + \xi}{(1-\alpha)(1-\xi)x + \alpha + (1-\alpha)\xi}$

   On pose $\begin{array}{ll} u(x) = (1-\xi)x + \xi & v(x) = (1-\alpha)(1-\xi)x + \alpha + (1-\alpha)\xi \\ u'(x) = 1-\xi & v'(x) = (1-\alpha)(1-\xi) \end{array}$

   $\forall x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} u'(x)v(x) - u(x)v'(x) &= (1-\xi)\Big((1-\alpha)(1-\xi)x + \alpha + (1-\alpha)\xi\Big) \\ &\qquad - (1-\alpha)(1-\xi)\Big((1-\xi)x + \xi\Big) \\ &= (1-\xi)(1-\alpha)\Big[(1-\xi)x + \xi) - ((1-\xi)x + \xi)\Big] + (1-\xi)\alpha \\ &= (1-\xi)\alpha \end{aligned}$$

   $\psi'_\xi = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ donc $\psi'_\xi(x) = \dfrac{(1-\xi)\alpha}{v^2(x)} \geqslant 0$ sur $[0,1]$.

   $\boxed{\psi_\xi \text{ est croissante sur } [0,1]}$

   b) $\boxed{\psi_\xi(1) = 1}$

   c) i) $\boxed{\psi_\xi(0) = \dfrac{\xi}{\alpha + (1-\alpha)\xi}}$ On pose $\boxed{A(\xi) = \psi_\xi(0) \text{ Ainsi, } A(\xi) = \dfrac{\xi}{\alpha + (1-\alpha)\xi}}$

   ii) Soit $t \in [\![0, T-1]\!]$.

   $A(X(t)) = \dfrac{X(t)}{\alpha + (1-\alpha)X(t)}$ donc avec $\xi = X(t \in [0,1]$, on a $A(X(t)) = \psi_\xi(0)$

   $X(t+1) = \dfrac{p(t) + (1-p(t))X(t)}{p(t) + \alpha(1-p(t)) + (1-\alpha)(1-p(t))X(t)} = \psi_\xi(p(t))$.

   Or ψ_ξ est croissante sur $[0,1]$, et $0 \leqslant p(t) \leqslant 1$ donc $\psi_\xi(0) \leqslant \psi_x i(t) \leqslant \psi_\xi(1)$.

   Comme $\psi_\xi(1) = 1$, $\boxed{A(X(t)) \leqslant X(t+1) \leqslant 1}$

   $\boxed{A(X(t)) \leqslant X(t+1) \leqslant 1}$

   iii) $A(\xi) = \dfrac{\xi}{\alpha + (1-\alpha)\xi}$ donc A dérivable sur $[0,1]$ et

   $A'(\xi) = \dfrac{\alpha + (1-\alpha)\xi - (1-\alpha)\xi}{(\alpha + (1-\alpha)\xi)^2} = \dfrac{\alpha}{(\alpha + (1-\alpha)\xi)^2} > 0$

   $\boxed{A \text{ est croissante sur } [0,1]}$

8. $\dfrac{D(\tau)}{\cancel{D(\tau-1)}}.\dfrac{\cancel{D(\tau-1)}}{D(\tau-2)}\cdots\dfrac{D(2)}{\cancel{D(1)}}.\dfrac{\cancel{D(1)}}{\cancel{N(0)}}.\cancel{N(0)}=D(\tau)$ (produit télescopique)

$$\boxed{D(\tau)=\frac{D(\tau)}{D(\tau-1)}.\frac{D(\tau-1)}{D(\tau-2)}\cdots\frac{D(2)}{D(1)}.\frac{D(1)}{N(0)}.N(0)}$$

On pose $\hat{R}(0)=\ln\dfrac{D(1)}{N(0)}$ et $\hat{R}(t)=\ln\dfrac{D(t+1)}{D(t)}$ pour $1\leqslant t\leqslant T-1$

9. a) D'après 8),

$$\begin{aligned}E(\ln D(\tau))&=E\left(\ln\frac{D(\tau)}{D(\tau-1)}.\frac{D(\tau-1)}{D(\tau-2)}\cdots\frac{D(2)}{D(1)}.\frac{D(1)}{N(0)}.N(0)\right)\\&=E\left(\ln\left(\prod_{t=1}^{\tau-1}\frac{D(t+1)}{D(t)}\times\frac{D(1)}{N(0)}\times N(0)\right)\right)\\&=E\left(\sum_{t=1}^{\tau-1}\ln\frac{D(t+1)}{D(t)}+\ln\frac{D(1)}{N(0)}+\ln N(0)\right)\\&=E\left(\sum_{t=1}^{\tau-1}\hat{R}(t)+\hat{R}(0)+\ln N(0)\right)\end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance, on a donc :

$$\boxed{E(\ln D(\tau))=\ln\big(N(0)\big)+E\left(\hat{R}(0)+\sum_{t=1}^{\tau-1}\hat{R}(t)\right)}$$

b) Rappel : $X(t)=\dfrac{D(t)}{D(t)+N(t)}$ donc $X(t)\big[D(t)+N(t)\big]=D(t)$

$D(t+1)=D(t)+p(t)N(t)$

$N(t+1)=\alpha[1-p(t)]N(t)=\alpha N(t)-\alpha p(t)N(t)$

$D(0)=0,\ \alpha>1$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha X(1)}{1+(\alpha-1)X(1)}&=\frac{\alpha X(1)\big[D(1)+N(1)\big]}{\big[D(1)+N(1)\big]+(\alpha-1)X(1)\big[D(1)+N(1)\big]}\\&=\frac{\alpha D(1)}{D(1)+N(1)+(\alpha-1)D(1)}\\&=\frac{\alpha D(1)}{N(1)+\alpha D(1)}\end{aligned}$$

$D(1)=p(0)N(0)$
$N(1)=\alpha[1-p(0)]N(0)=\alpha N(0)-\alpha p(0)N(0)$ donc $N(1)+\alpha D(1)=\alpha N(0)$

Ainsi $\dfrac{\alpha X(1)}{1+(\alpha-1)X(1)}=\dfrac{\alpha D(1)}{\alpha N(0)}$ donc $\boxed{\dfrac{D(1)}{N(0)}=\dfrac{\alpha X(1)}{1+(\alpha-1)X(1)}}$

c) Comme $X(t+1)\big[D(t+1)+N(t+1)\big]=D(t+1)$, en multipliant numérateur et dénominateur par $\big[D(t+1)+N(t+1)\big]$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\alpha X(t+1)}{X(t)\big[1+(\alpha-1)X(t+1)\big]}&=\frac{\alpha D(t+1)}{X(t)\big[\cancel{D(t+1)}+N(t+1)+(\alpha-\cancel{1})D(t+1)\big]}\\&=\frac{\alpha D(t+1)}{X(t)\Big[N(t+1)+\alpha D(t+1)\Big]}\end{aligned}$$

Or $N(t+1)+\alpha D(t+1)=\alpha\big[N(t)+D(t)\big]$

$$\frac{\alpha X(t+1)}{X(t)\big[1+(\alpha-1)X(t+1)\big]}=\frac{\alpha D(t+1)}{X(t)\times\alpha\big[N(t)+D(t)\big]}=\frac{D(t+1)}{X(t)\times\big[N(t)+D(t)\big]}=\frac{D(t+1)}{D(t)}$$

$$\boxed{\frac{D(t+1)}{D(t)}=\frac{\alpha X(t+1)}{X(t)\big[1+(\alpha-1)X(t+1)\big]},\ \text{pour } 1\leqslant t\leqslant T-1}$$

si $x>0$ et $y>0$, on pose $u(x,y)=\ln\alpha-\ln x+\ln y-\ln(1+(\alpha-1)y)$

d) $\hat{R}(0)=\ln\dfrac{D(1)}{N(0)}=\ln\dfrac{\alpha X(1)}{1+(\alpha-1)X(1)}$ d'après 9b

$=\ln\alpha+\ln X(1)-\ln\left(1+(\alpha-1)X(1)\right)$

$u\big(1,X(1)\big)=\ln\alpha-\ln 1+\ln X(1)-\ln(1+(\alpha-1)X(1))$

Donc $\boxed{\hat{R}(0)=u\big(1,X(1)\big)}$

e) $\hat{R}(t)=\ln\dfrac{D(t+1)}{D(t)}=\ln\dfrac{\alpha X(t+1)}{X(t)\big[1+(\alpha-1)X(t+1)\big]}$

$=\ln\alpha+\ln X(t+1)-\ln X(t)-\ln\big[1+(\alpha-1)X(t+1)\big]$

$u\big(X(t),X(t+1)\big)=\ln\alpha-\ln X(t)+\ln X(t+1)-\ln(1+(\alpha-1)X(t+1))$

Donc $\boxed{\hat{R}(t)=u\big(X(t),X(t+1)\big)\ \text{pour } 1\leqslant t\leqslant T-1}$

f) $E(\ln D(\tau))=\ln N(0)+E\left(\hat{R}(0)+\displaystyle\sum_{t=1}^{\tau-1}\hat{R}(t)\right)$

$$\boxed{E(\ln D(\tau))=\ln N(0)+E\left[u\big(1,X(1)\big)+\sum_{t=1}^{\tau-1}u\big(X(t),X(t+1)\big)\right]}$$

Maximiser $E(\ln D(\tau))$ revient à choisir, à chaque date t telle que $1\leqslant t\leqslant\tau-1$, la valeur de $X(t+1)\in[A(X(t)),1]$ qui rend maximale

$$E\left[u\big(1,X(1)\big)+\sum_{t=1}^{\tau-1}u\big(X(t),X(t+1)\big)\right]$$

Partie III : Programmation dynamique

10. Soit B un événement. $\mathbb{1}_B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

a) $\mathbb{1}_B(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(\mathbb{1}_B = 1) = P(B)$ donc $\boxed{\mathbb{1}_B \hookrightarrow \mathcal{B}(P(B))}$

b) $\mathbb{1}_{B\cap C}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega \in B \cap C$
$\Leftrightarrow \omega \in B$ et $\omega \in C$
$\Leftrightarrow \mathbb{1}_B(\omega) = 1$ et $\mathbb{1}_C(\omega) = 1$
$\Leftrightarrow \mathbb{1}_B(\omega) \times \mathbb{1}_C(\omega) = 1$

car si $\mathbb{1}_B(\omega) \times \mathbb{1}_C(\omega) = 0$, alors $\mathbb{1}_B(\omega) = 0$ ou $\mathbb{1}_C(\omega) = 0$.

$\boxed{\mathbb{1}_{B\cap C} = \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C}$

c) On suppose que $0 < P(B) < 1$. Si Y VA finie on définit la VA $E_B(Y)$ par

$$\boxed{E_B(Y) = \frac{1}{P(B)}E(Y\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B + \frac{1}{P(\overline{B})}E(Y\mathbb{1}_{\overline{B}})\mathbb{1}_{\overline{B}}}$$

i) Par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} E_B(Y+Z) &= \frac{1}{P(B)}E((Y+Z)\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B + \frac{1}{P(\overline{B})}E((Y+Z)\mathbb{1}_{\overline{B}})\mathbb{1}_{\overline{B}} \\ &= \frac{1}{P(B)}\Big[E(Y\mathbb{1}_B) + E(Z\mathbb{1}_B)\Big]\mathbb{1}_B + \frac{1}{P(\overline{B})}\Big[E(Y\mathbb{1}_{\overline{B}}) + E(Z\mathbb{1}_{\overline{B}})\Big]\mathbb{1}_{\overline{B}} \\ &= \frac{1}{P(B)}E(Y\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B + \frac{1}{P(B)}E(Z\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B + \frac{1}{P(\overline{B})}E(Y\mathbb{1}_{\overline{B}})\mathbb{1}_{\overline{B}} + \frac{1}{P(\overline{B})}E(Z\mathbb{1}_{\overline{B}})\mathbb{1}_{\overline{B}} \end{aligned}$$

$\boxed{E_B(Y+Z) = E_B(Y) + E_B(Z)}$

ii) Par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} E(E_B(Y)) &= E\left(\frac{1}{P(B)}E(Y\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B + \frac{1}{P(\overline{B})}E(Y\mathbb{1}_{\overline{B}})\mathbb{1}_{\overline{B}}\right) \\ &= \frac{1}{P(B)}E(Y\mathbb{1}_B) \times E(\mathbb{1}_B) + \frac{1}{P(\overline{B})}E(Y\mathbb{1}_{\overline{B}}) \times E(\mathbb{1}_{\overline{B}}) \end{aligned}$$

Or $\mathbb{1}_B \hookrightarrow \mathcal{B}(P(B))$ donc $E(\mathbb{1}_B) = P(B)$

$$\begin{aligned} E(E_B(Y)) &= \frac{1}{\cancel{P(B)}}E(Y\mathbb{1}_B) \times \cancel{P(B)} + \frac{1}{\cancel{P(\overline{B})}}E(Y\mathbb{1}_{\overline{B}}) \times \cancel{P(\overline{B})} \\ &= E\left(Y\mathbb{1}_B + Y\mathbb{1}_{\overline{B}}\right) \end{aligned}$$

$\boxed{E(E_B(Y)) = E(Y)}$ car $\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{\overline{B}} = 1$

iii) $E_B(Y\mathbb{1}_B) = \dfrac{1}{P(B)}E(Y\mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B + \dfrac{1}{P(\overline{B})}E(Y\mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_{\overline{B}})\mathbb{1}_{\overline{B}} \quad = \dfrac{1}{P(B)}E(Y\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B$

car $\mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_{\overline{B}} = 0$

$$E_B(Y)\mathbb{1}_B = \left(\frac{1}{P(B)}E(Y\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B + \frac{1}{P(\overline{B})}E(Y\mathbb{1}_{\overline{B}})\mathbb{1}_{\overline{B}}\right) \times \mathbb{1}_B = \frac{1}{P(B)}E(Y\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B$$

$\boxed{E_B(Y\mathbb{1}_B) = E_B(Y)\mathbb{1}_B}$

11. On suppose dans cette question que quand $[\tau = T]$ est réalisé, on connait $X(1), \dots, X(T-1)$. Si on pose $x = X(T-1)$, le meilleur choix est de prendre pour $X(T)$ la valeur $y^*(x, T-1) \in [A(x), 1]$ qui maximise $u(x,y)$

a) $u(x,y) = \ln\alpha - \ln x + \ln y - \ln(1 + (\alpha-1)y)$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{\alpha-1}{1+(\alpha-1)y} = \frac{1+(\alpha-1)y-(\alpha-1)y}{y[1+(\alpha-1)y]} = \frac{1}{y[1+(\alpha-1)y]} > 0$$

La fonction $y \mapsto u(x,y)$ est croissante donc son maximum est atteint en 1

$\boxed{y^*(x, T-1) = 1}$

b) $u(x,1) = \ln\alpha - \ln x - \ln(1+(\alpha-1))$ donc $\boxed{u(x,1) = -\ln x}$

12. On suppose maintenant que quand $[\tau \geqslant T-1]$ est réalisé, on connait $X(1), \dots, X(T-2)$.

La stratégie est de choisir $X(T-1)$ et $X(T)$ pour maximiser $E\left(\sum_{t=1}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)$

τ prend les valeurs $T-1$ et T avec les proba $P_{[\tau\geqslant T-1]}(\tau = T-1)$ et $P_{[\tau\geqslant T-1]}(\tau = T)$.

a) • Si $\tau < T-1$, les deux membres de l'égalité valent 0 donc l'égalité est vraie.

• Si $\tau = T-1$, alors $\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} = 1$ et $\mathbb{1}_{[\tau=T]} = 0$ donc les deux membres valent $\displaystyle\sum_{t=T-2}^{T-2} u(X(t), X(t+1)) = u(X(T-2), X(T-1))$.

• Si $\tau = T$, alors $\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} = 1$ et $\mathbb{1}_{[\tau=T]} = 1$: les deux membres valent $\displaystyle\sum_{t=T-2}^{T-1} u(X(t), X(t+1)) = u(X(T-2), X(T-1)) + u(X(T-1), X(T))$.

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} \sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1)) \\ &\qquad = \mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}u(X(T-2), X(T-1)) + \mathbb{1}_{[\tau=T]}u(X(T-1), X(T)) \end{aligned}}$$

b) $\mathbb{1}_B E_B(Y) = E_B(\mathbb{1}_B.Y)$ donc avec $B = [\tau \geqslant T-1]$ et $Y = \displaystyle\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))$,

$$\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}E_{[\tau\geqslant T-1]}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right) = E_{[\tau\geqslant T-1]}\left(\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right)$$

D'après 12 a) et comme $\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]} \times \mathbb{1}_{[\tau=T]} = \mathbb{1}_{[\tau=T]}$,

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}E_{[\tau\geqslant T-1]}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right) \\ &\qquad = E_{[\tau\geqslant T-1]}\left(\mathbb{1}_{[\tau\geqslant T-1]}.u(X(T-2), X(T-1)) + \mathbb{1}_{[\tau=T]}.u(X(T-1), X(T))\right) \end{aligned}}$$

c) On pose $U = u(X(T-2), X(T-1))$, $V = u(X(T-1), X(T))$, $B = [\tau \geqslant T-1]$

On doit donc montrer que

$$E_B\left(\mathbb{1}_B U + \mathbb{1}_{[\tau=T]} V\right) = U.\mathbb{1}_B + \frac{P(\tau = T)}{P(\tau \geqslant T-1)} V.\mathbb{1}_B$$

Comme $E_B(Y+Z) = E_B(Y) + E_B(Z)$, on a

$$\boxed{E_B\left(\mathbb{1}_B U + \mathbb{1}_{[\tau=T]} V\right) = E_B(\mathbb{1}_B U) + E_B\left(\mathbb{1}_{[\tau=T]} V\right)}$$

Or par définition $E_B(Y) = \dfrac{1}{P(B)} E(Y \mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B + \dfrac{1}{P(\overline{B})} E(Y \mathbb{1}_{\overline{B}})\mathbb{1}_{\overline{B}}$, donc

- $$\begin{aligned} E_B(U.\mathbb{1}_B) &= \frac{1}{P(B)} E(U.\mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B + \frac{1}{P(\overline{B})} E(U.\mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_{\overline{B}})\mathbb{1}_{\overline{B}} \\ &= \frac{1}{P(B)} E(U.\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B \\ &= \frac{U}{\cancel{P(B)}} \cancel{E(\mathbb{1}_B)}\, \mathbb{1}_B \\ &= U.\mathbb{1}_B \quad \text{car } E(\mathbb{1}_B) = P(B) \end{aligned}$$

- $$E_B\left(\mathbb{1}_{[\tau=T]} V\right) = \frac{1}{P(B)} E\left(\mathbb{1}_{[\tau=T]} V \times \mathbb{1}_B\right)\mathbb{1}_B + \frac{1}{P(\overline{B})} E\left(\mathbb{1}_{[\tau=T]} V \times \mathbb{1}_{\overline{B}}\right)\mathbb{1}_{\overline{B}}$$

Or $\mathbb{1}_{[\tau=T]}.\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{[\tau=T]}.\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} = \mathbb{1}_{[\tau=T] \cap [\tau \geqslant T-1]} = \mathbb{1}_{[\tau=T]}$

Et $\mathbb{1}_{[\tau=T]}.\mathbb{1}_{\overline{B}} = \mathbb{1}_{[\tau=T]}.\mathbb{1}_{[\tau < T-1]} = 0$

$$\begin{aligned} \text{Donc } E_B\left(\mathbb{1}_{[\tau=T]}.V\right) &= \frac{1}{P(B)} E\left(\mathbb{1}_{[\tau=T]} V\right) \mathbb{1}_B \\ &= \frac{V}{P(B)} E\left(\mathbb{1}_{[\tau=T]}\right) \mathbb{1}_B \\ &= \frac{V}{P(\tau \geqslant T-1)} P(\tau = T)\, \mathbb{1}_B \end{aligned}$$

Donc $E_B\left(\mathbb{1}_B U + \mathbb{1}_{[\tau=T]} V\right) = U.\mathbb{1}_B + \dfrac{P(\tau = T)}{P(\tau \geqslant T-1)} V.\mathbb{1}_B$

$$\boxed{\begin{aligned} &E_{[\tau \geqslant T-1]}\left(\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} u(X(T-2), X(T-1)) + \mathbb{1}_{[\tau=T]} u(X(T-1), X(T))\right) \\ &\quad = u\big(X(T-2), X(T-1)\big).\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} + \frac{P(\tau = T)}{P(\tau \geqslant T-1)}.u\big(X(T-1), X(T)\big).\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} \end{aligned}}$$

d) On suppose que $X(T-1)$ est donné.
i) On veut maximiser $u(X(T-1), X(T))$ donc comme à la question 11a), on doit prendre $\boxed{X(T) = 1}$

ii) On a vu que $u(x, 1) = -\ln 1$ donc si $X(T) = 1$, on a

$$\boxed{u\big(X(T-1), X(T)\big) = -\ln(X(T-1))}$$

e) D'une part $P_{[\tau \geqslant T-1]}(\tau = T) = \dfrac{P([\tau \geqslant T-1] \cap [\tau = T])}{P(\tau \geqslant T-1)} = \dfrac{P(\tau = T)}{P(\tau \geqslant T-1)}$

D'autre part,

$$1 - H(T-1) = 1 - \frac{P(\tau = T-1)}{P(\tau \geqslant T-1)} = \frac{P(\tau \geqslant T-1) - P(\tau = T-1)}{P(\tau \geqslant T-1)} = \frac{P(\tau = T)}{P(\tau \geqslant T-1)}$$

$$\boxed{P_{[\tau \geqslant T-1]}(\tau = T) = 1 - H(T-1)}$$

On veut maintenant choisir la stratégie optimale à la date $T-2$.

f) On pose $\Phi(y) = u\big(X(T-2), y\big) - (1 - H(T-1)) \ln y$

Ainsi, $\Phi(X(T-1)) = u\big(X(T-2), X(T-1)\big) - (1 - H(T-1) \ln X(T-1)$

Or $1 - H(T-1) = \dfrac{P(\tau = T)}{P(\tau \geqslant T-1)}$ et $u\big(X(T-1), X(T)\big) = -\ln(X(T-1))$

Donc $\Phi(X(T-1)) = u\big(X(T-2), X(T-1)\big) + \dfrac{P(\tau = T)}{P(\tau \geqslant T-1)} \times u\big(X(T-1), X(T)\big)$

Par ailleurs, avec 12 b) et 12c) on a

$$\begin{aligned} &\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} E_{[\tau \geqslant T-1]}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right) \\ &\quad = u\big(X(T-2), X(T-1)\big).\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} + \frac{P(\tau = T)}{P(\tau \geqslant T-1)}.u\big(X(T-1), X(T)\big).\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} \\ &\quad = \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} \left(u\big(X(T-2), X(T-1)\big) + \frac{P(\tau = T)}{P(\tau \geqslant T-1)}.u\big(X(T-1), X(T)\big)\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} E_{[\tau \geqslant T-1]}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\right) = \mathbb{1}_{[\tau \geqslant T-1]} \Phi(X(T-1))}$$

Le but est de maximiser $E\left(\displaystyle\sum_{t=1}^{\tau-1} u\big(X(t), X(t+1)\big)\right)$ et comme $E(Y) = E(E_B(Y))$,

on doit donc maximiser $E\left(E_{[\tau \geqslant T-1]}\left(\displaystyle\sum_{t=1}^{\tau-1} u\big(X(t), X(t+1)\big)\right)\right)$

$$\boxed{\text{On doit choisir pour } X(T-1) \text{ la valeur } y^*(X(T-2), T-2) \in [A(X(T-2)), 1] \text{ qui maximise } \Phi(y)}$$

g) $\Phi(y) = u\big(X(T-2), y\big) - (1 - H(T-1) \ln y$ donc Φ est dérivable sur $]0,1]$ et

$\forall y \in]0,1],\ \Phi'(y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(X(T-2), y) - (1 - H(T-1)) \times \dfrac{1}{y}$

Or d'après 11a), $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{\alpha - 1}{1 + (\alpha-1)y}$

$$\begin{aligned}
\text{Donc}\quad \Phi'(y) = \quad &= \frac{\cancel{1}}{\cancel{y}} - \frac{\alpha-1}{1+(\alpha-1)y} - (\cancel{1} - H(T-1)) \times \frac{1}{y} \\
&= -\frac{\alpha-1}{1+(\alpha-1)y} + \frac{H}{y} \\
&= \frac{-y\big[\alpha-1\big] + H\big[1+(\alpha-1)y\big]}{y\big[1+(\alpha-1)y\big]} \\
&= \frac{H + (\alpha-1)(H-1)y}{y\big[1+(\alpha-1)y\big]}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Phi'(y) = \frac{H(T-1) - (\alpha-1)(1-H(T-1))y}{y\big[1+(\alpha-1)y\big]}}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi,}\ \Phi'(y) \geqslant 0 &\Leftrightarrow H - (\alpha-1)(1-H)y \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow (\alpha-1)(1-H)y \leqslant H \\
&\Leftrightarrow y \leqslant \frac{H}{(\alpha-1)(1-H)} \qquad \text{car } \alpha > 1 \text{ et } H \leqslant 1 (H \text{ est une proba})
\end{aligned}$$

On pose $B = \dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))}$.

Ainsi, $\boxed{\Phi'(y) \geqslant 0 \Leftrightarrow y \leqslant B}$

h) Si $\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \leqslant 1$ ie si $B \leqslant 1$,

Comme $y \in [A(X(T-2), 1]$, reste à savoir si $A(X(T-2) \leqslant B$ ou pas....

• Si $A(X(T-2) \leqslant B$,

x	A		B		1
$\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\Phi(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Le maximum est atteint en $B = \dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))}$

• Si $B < A(X(T-2)$, on a $\Phi'(y) < 0$

x	A		1
$\Phi(x)$		$\searrow$	

Le maximum est atteint en $A(X(T-2))$

i) Si $\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \geqslant 1$, ie $B \geqslant 1$, on a $\Phi'(y) \geqslant 0$ donc

x	A		1
$\Phi(x)$		$\nearrow$	

Le maximum est atteint en 1

j)

• Si $\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \geqslant 1$, alors $y^*(X(T-2), T-2) = 1$

• Si $\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \leqslant 1$, alors

$y^*(X(T-2), T-2) = \max\left(A(X(T-2)), \dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))}\right)$