ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Concours Blanc n°3

Sujet type **EML** / **Ecricome**
Mardi 3 Décembre 2019
Durée : 4 heures

Exercice 1

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $E = \mathcal{M}_{3,1}$.

(1) (a) Déterminer $(A - I)^2$.
  (b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.

(2) On pose $A = N + I$.
  (a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N, puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.
  (b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

(3) On pose $u_1 = (A - I)(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.
  (a) Montrer que l'ensemble $E_1 = \{X \in E : \ (A - I)X = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E et que (u_1, u_2) en est une base.
  (b) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.
  (c) On note T la matrice dont les colonnes sont respectivement les coordonnées de Au_1, Au_2 et Ae_1 dans la base (u_1, u_2, e_1). Expliciter T.

(4) Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible puis que $A = PTP^{-1}$.

(5) On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que, pour tout (i, j) de $[\![1, 3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1.

  (a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.

(b) Soit N une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :

$$NA = AN \iff (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP)$$

(c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille :

$$(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}).$$

Exercice 2

Partie I - Étude d'une (suite de) fonction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}.$$

(1) (a) Étudier les variations de la fonction g_0.
On précisera la limite de g_0 en $+\infty$, ainsi que l'équation de la tangente en 0.
(b) Donner l'allure de la courbe représentative de g_0.

(2) (a) Pour $n \geqslant 1$, justifier que g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et montrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$g_n'(x) \geqslant 0 \quad \iff \quad n \geqslant 2\ln(1+x).$$

En déduire les variations de la fonction g_n lorsque $n \geqslant 1$.

(b) Calculer soigneusement $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x)$.
(c) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ qui vaut

$$M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$

et déterminer la limite de M_n lorsque n tend vers $+\infty$.
(d) Montrer enfin que pour tout $n \geqslant 1$,

$$g_n(x) = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \quad x \to +\infty.$$

Partie II - Étude d'une suite d'intégrales

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t.$$

(3) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.
(4) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale I_n est convergente.
(5) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = (n+1)I_n.$$

(6) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = n!.$$

Partie III - Une fonction définie par une intégrale

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction F_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$F_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x g_n(t)\mathrm{d}t.$$

(7) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est bien définie. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$?
(8) Calculer $F_0(x)$ pour $x \geqslant 0$.
(9) Soit $x \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}.$$

(10) En déduire une expression de $F_n(x)$ pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ faisant intervenir une somme qu'on ne cherchera pas à calculer.
(11) Pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches, dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, **sans remise**, jusqu'à l'apparition de la boule noire.

Pour chaque i de $[\![1, n-1]\!]$, on note B_i l'événement : "le i-ème tirage donne une boule blanche", et on pose $\overline{B_i} = N_i$. Enfin, on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.

Partie I - Simulation informatique

On rappelle qu'en `SciLab`, la commande `grand(1,1,'uin',a,b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$.

(1) Compléter la fonction `SciLab` suivant afin qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et renvoie les valeurs prises par les variables X et Y.
On admettra que la boule noire est codée tout au long de ce script par le nombre `nB+1`, où `nB` désigne le nombre de boules blanches.

```
function [x,y]=XY(n)
nB=n-1
x=1
y=................
u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
while u<nB+1
        nB=...........
        if u==1 then y=..............
        end
        u=grand(1,1,'uin',1,........)
        x=.............
end
endfunction
```

(2) On génère un échantillon de taille 1000 du couple (X, Y). Compléter le script suivant afin de calculer la covariance empirique de l'échantillon obtenu.

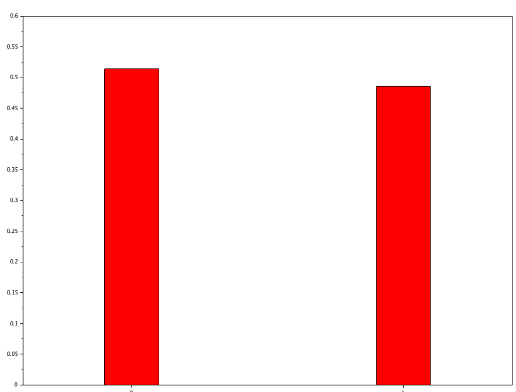
```
n=input('n=?')
X=zeros(1, 1000);
Y=zeros(1, 1000);
for k=1:1000
    [X(k), Y(k)]=XY(n)
end
covXY=mean(..........................)
disp(covXY)
```

(3) En rentrant $n = 4$, le programme affiche `0.449475`. Que peut-on conjecturer?

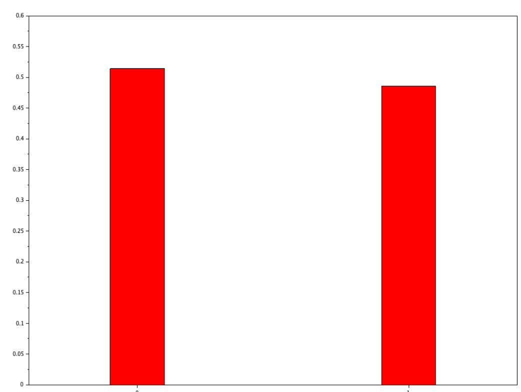
(4) On remplace les deux dernières lignes du programme précédent par le script suivant que l'on exécute successivement pour $n = 4$, $n = 5$, $n = 10$ et $n = 50$.

```
T=tabul(Y, 'i');
T(:,2)=T(:,2)/1000;
bar(T(:,1), T(:, 2), width=0.2, 'red')
```

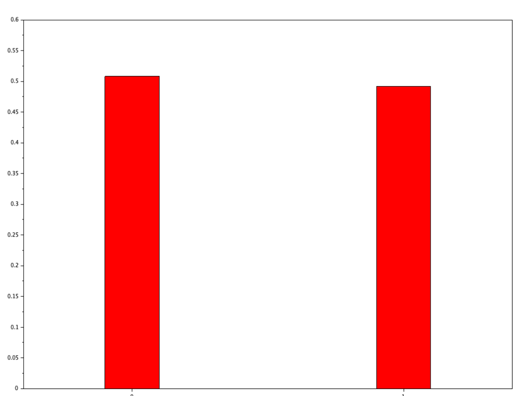
`SciLab` affiche alors respectivement les quatre figures ci-dessous



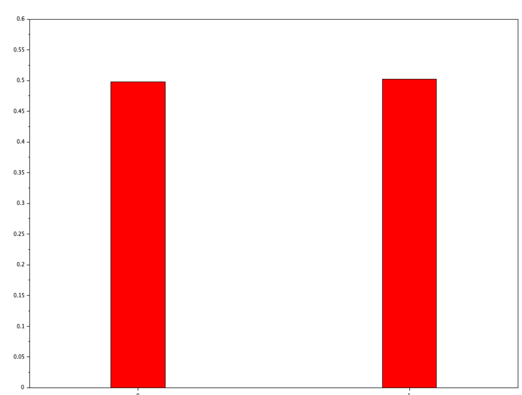
$n = 4$



$n = 5$



$n = 10$



$n = 50$

Que peut-on alors conjecturer quant à la la loi de Y?

Partie II - Loi conjointe de X et Y

(5) Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.

(6) (a) Pour tout i de $[\![2, n-1]\!]$, justifier que

$$P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}.$$

(b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $P(X = k)$, pour tout k de $X(\Omega)$.

(c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

(7) (a) Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que

$$P\Big([X = k] \cap [Y = 0]\Big) = \frac{n-k}{n(n-1)}.$$

(b) En déduire $P(Y = 0)$ puis $P([X = k] \cap [Y = 1])$.

(c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.

(d) Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

Partie III - Un calcul de covariance

(8) (a) On considère deux nombres entiers naturels k et n tels que $n \geqslant k$. Rappeler le lien entre les nombres

$$\binom{k}{j}, \qquad \binom{k+1}{j+1} \quad \text{et} \quad \binom{k}{j+1}.$$

(b) Établir alors la formule suivante:

$$\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} = \binom{n+1}{j+1}$$

(c) En faisant $j = 2$, en déduire une expression factorisée de la somme suivante:

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1).$$

(9) Montrer que

$$E(XY) = \sum_{k=1}^{n} kP([X = k] \cap [Y = 1]) = \frac{n+1}{3}.$$

(10) En déduire la valeur de $\text{cov}(X, Y)$.