ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Concours Blanc n°3

Sujet type **EML** / **Ecricome**
Lundi 2 Décembre 2019
Solution

Exercice 1 - D'après EDHEC 2019

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $E = \mathcal{M}_{3,1}$.

(1) (a) Le calcul donne

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et, sans difficulté $(A - I)^2 = 0$.

(b) Comme A et I commutent, le développement (de l'identité remarquable) donne

$$A^2 - 2A + I = 0 \Longleftrightarrow 2A - A^2 = I \Longleftrightarrow A \cdot (2I - A) = I.$$

Ainsi, on en déduit que A est inversible et que

$$A^{-1} = 2I - A.$$

(2) On pose $A = N + I$.

(a) La matrice $N = A - I$ est nilpotente (d'ordre 2) d'après la question précédente. Il suit, comme A et I commutent, d'après la *formule du binôme*, que

$$\begin{aligned} A^n &= (N + I)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} N^k I^{n-k} = \sum_{k=0}^{1} N - k \\ &= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N = I + nN. \end{aligned}$$

Comme $N = A - I$, il suit que

$$A^n = I + n(A - I) = nA - (n-1)I.$$

(b) Pour $n = -1$, l'expression ci-dessus donne

$$-A - (-1-1)I = 2I - A,$$

ce qui est bien l'expression trouvée plus haut pour A^{-1}. La formule est donc vraie pour $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq -1$.

(3) On pose $u_1 = (A - I)(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$. Commençons par voir que

$$u_1 = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) On résout.

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 &\iff NX = 0 \\ &\iff \begin{cases} -x + y + z &= 0 \\ -2x + 2y + 2z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \end{cases} \\ &\iff x = y + z \\ &\iff X = \begin{pmatrix} y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 \right),$$

ce qui permet d'affirmer que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (donc un espace vectoriel) mais ce n'est pas encore tout à fait ce que l'on veut. On observe alors que

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2$$

D'après les propriétés du cours, on peut alors écrire

$$E_1 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2).$$

La famille (u_1, u_2) est alors génératrice de E_1 et les vecteurs étant clairement non colinéaires, ils forment une famille libre et donc une base de E_1 (qui est alors de dimension 2).

(b) La famille (u_1, u_2, e_1) étant composée de 3 vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3, il suffit de montre qu'elle est libre pour qu'elle en forme une base.

$$\begin{aligned} \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma e_1 = 0 &\iff \begin{cases} -\alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ -2\alpha &= 0 \\ \alpha + \beta &= 0 \end{cases} \\ &\iff \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{aligned}$$

La famille (u_1, u_2, e_1) est bien libre et forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(c) Comme u_1 et u_2 sont éléments de E_1, on a $Au_1 = u_1$ et $Au_2 = u_2$. Les deux premières colonnes de T sont donc
$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$
Mais, $(A-I)e_1 = u_1$ donc $Ae_1 = u_1 + e_1$ et la troisième colonne est alors égale à $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Au final,
$$T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(4) Soit la matrice $P = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\-2 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Il suffit normalement de dire que les colonnes de P forment une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour que celle-ci soit inversible (car l'endomorphisme associé a donc une image de rang 3 ...).

N'ayant pas encore revu ces notions au moment où l'on écrit cette correction; on propose un autre argument, à partir du Pivot de Gauss. Notant (L_i) les lignes de P, l'opération $(L_3) \leftarrow (L_3) - (L_1)$ mène a une matrice triangulaire sans zéro sur la diagonale. Un pivot de Gauss partiel est donc possible et la matrice P est inversible.

Naturellement, si l'on poursuit le pivot de Gauss jusqu'au bout, on obtient P^{-1} et c'est bien, mais c'est long et on ne demande pas de calculer P^{-1}, on économise donc du temps en justifiant seulement de l'inversibilité de P.

Comme P est inversible, $A = PTP^{-1}$ revient à montrer que $AP = TP$. C'est un calcul que l'on vérifie:
$$AP = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\-2 & 0 & -2\\1 & 1 & 1\end{pmatrix} = PT.$$

(5) On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que, pour tout (i,j) de $[\![1,3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1.

(a) Notons $C_T = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \ MT = TM\}$. Déterminons une famille génératrice pour commencer.
$$M = \begin{pmatrix}x & y & z\\u & v & w\\a & b & c\end{pmatrix} \in C_T \iff \begin{pmatrix}x & y & z\\u & v & w\\a & b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y & z\\u & v & w\\a & b & c\end{pmatrix}$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& x+a\\ y &=& y+b\\ x+z &=& z+c\\ u &=& u\\ u+w &=& w\\ a &=& a\\ b &=& b\\ a+c &=& c\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} b &=& 0\\ x &=& c\\ u &=& 0\\ a &=& 0\end{array}\right.$$

Ainsi,

$$M \in C_T \iff M = \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & v & w \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = x(E_{1,1} + E_{3,3}) + zE_{1,3} + vE_{2,2} + wE_{2,3}$$

Ainsi, on a bien

$$C_T + \mathrm{Vect}\,(E_{1,1} + E_{3,3};\ E_{1,3};\ E_{2,2};\ E_{2,3})$$

et la famille considérée est bien génératrice de C_T. Celle-ci étant clairement libre (le système est trivial), elle forme une base de C_T qui est donc de dimension 5.

(b) Soit N une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Comme $A = PTP^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} NA = AN &\iff NPTP^{-1} = PTP^{-1}N \\ &= P^{-1}NPTP^{-1} = P^{-1}PTP^{-1}N = TP^{-1}N \\ &= P^{-1}NPT = TP{-}1NP, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(c) Notons alors C_A le sous-espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ formé des matrices qui commutent avec A. D'après ce qu"on vient d'écrire

$$N \in C_A \iff P^{-1}NP \in C_T$$

Mais on connait une base de C_T. Il suit que

$$\begin{aligned} N \in C_A &\iff \exists x, z, v, w \in \mathbb{R}, \quad P^{-1}NP = x(E_{1,1} + E_{3,3}) + zE_{1,3} + vE_{2,2} + wE_{2,3} \\ &\iff \exists x, z, v, w \in \mathbb{R}, \quad N = P\left(x(E_{1,1} + E_{3,3}) + zE_{1,3} + vE_{2,2} + wE_{2,3}\right)P^{-1} \\ &\iff \exists x, z, v, w \in \mathbb{R}, \quad N = xP(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1} + zPE_{1,3}P^{-1} + vPE_{2,2}P^{-1} + wPE_{2,3}P^{-1} \end{aligned}$$

et la famille :

$$(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}).$$

engendre bien C_A.

Exercice 2 - D'après ECRICOME 2016

Partie I - Étude d'une (suite de) fonction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

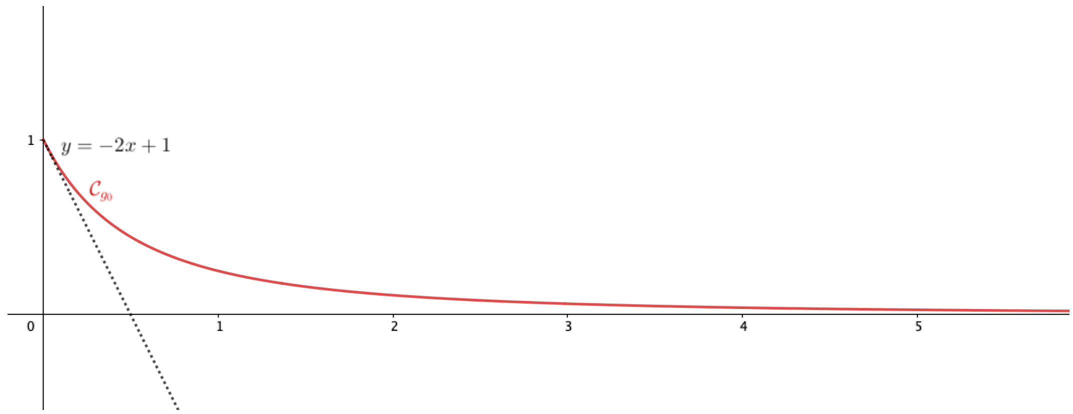
$$g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}.$$

(1) (a) g_0 est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ (comme quotient de deux fonctions C^∞ avec un dénominateur non nul), strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ comme inverse d'une fonction strictement croissante et (strictement) positive.

$$\lim_{x \to +\infty} g_0(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(1+x)^2} = 0.$$

L'équation de la tangente en 0 est $y = g_0'(0)(x - 0) + g_0(0)$. Or, pour tout $x \geq 0$, $g_0'(x) = -\frac{2}{(1+x)^3}$, donc la tangente en 0 a pour équation $y = -2x + 1$.

(b) Pour guider le tracer, on peut remarquer que g_0 est convexe (sa dérivée seconde est strictement positive). Cela donne



(2) Soit $n \geq 1$.

(a) g_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$ comme composée, puissance et quotient de fonctions usuelles et, pour tout $x \geq 0$,

$$g_n'(x) = \frac{n\dfrac{1}{1+x}(\ln(1+x))^{n-1}(1+x)^2 - 2(1+x)(\ln(1+x))^n}{(1+x)^4}.$$

Ainsi, pour tout $x \geq 0$,

$$g_n'(x) = \frac{\overbrace{(1+x)(\ln(1+x))^{n-1}}^{\geq 0}(n-2\ln(1+x))}{\underbrace{(1+x)^4}_{\geq 0}}.$$

D'où

$$\begin{aligned} g_n'(x) \geq 0 &\iff n - 2\ln(1+x) \geq 0 \\ &\iff n \geq 2\ln(1+x) \\ &\iff 1+x \leq e^{n/2} \\ &\iff x \leq e^{n/2}-1. \end{aligned}$$

Comme $n/2 > 0$, $e^{n/2} > 1$ on a donc $e^{n/2}-1 \in [0,+\infty[$. On peut alors dresser le tableau de variations de g_n:

x	0		$e^{n/2}-1$		$+\infty$
$g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_n)$	0	$\nearrow$	M_n	$\searrow$	0

avec

$$M_n = g_n(e^{n/2}-1), \qquad g_n(0) = \frac{(\ln(1))^n}{1^2} = 0.$$

(b) En posant $y = 1+x \longrightarrow +\infty$, $x \to +\infty$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{(\ln y)^n}{y^2} = 0$$

par croissances comparées.

(c) D'après le tableau de variations de g_n, g_n admet un maximum sur $[0,+\infty[$ en $e^{n/2}-1$ qui vaut :

$$M_n = g_n(e^{n/2}-1) = \frac{(\ln(e^{n/2}))^n}{(e^{n/2})^2} = \frac{(n/2)^n}{e^n} = \left(\frac{n}{2e}\right)^n.$$

Comme

$$\ln(M_n) = n\ln\left(\frac{n}{2e}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = +\infty.$$

(d) Pour tout $n \geq 1$,

$$x^{3/2}g_n(x) = \frac{x^{3/2}\ln(1+x)^n}{x^2(1+2/x+1/x^2)} = \frac{\ln(1+x)^n}{x^{1/2}} \times \frac{1}{1+2/x+1/x^2} \longrightarrow 0,\ x\to+\infty$$

par croissances comparées et on peut bien conclure que

$$g_n(x) = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \qquad x\to+\infty.$$

Partie II - Étude d'une suite d'intégrales

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t.$$

(3) Soit $A>0$.

$$\begin{aligned}\int_0^A g_0(t)\mathrm{d}t &= \int_0^A \frac{1}{(1+t)^2}\mathrm{d}t\\ &= \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^A\\ &= -\frac{1}{1+A}+1\\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1,\end{aligned}$$

donc I_0 converge et vaut 1.

(4) Soit $n\geq 1$. On procède par comparaison.

- g_n et $t\mapsto 1/t^{3/2}$ sont continues et positives sur $[1,+\infty[$;
- $g_n(t)$ est négligeable devant $1/t^{3/2}$ (quand $t\to+\infty$) d'après (2)(d);
- Par critère de Riemann, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{3/2}}\mathrm{d}t$$

converge (car $3/2>1$)

donc, d'après le théorème de comparaison par négligeabilité des intégrales de fonctions positives,

$$\int_1^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$$

converge aussi. Enfin, comme g_n est continue sur $[0,1]$, l'intégrale de $g_n(t)$ sur ce même intervalle est bien définie. Au final,

$$I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$$

converge.

(5) Soit $A > 0$. Posons

$$\left\{\begin{array}{rcl} u(t) & = & (\ln(1+t))^{n+1} \\ v'(t) & = & \dfrac{1}{(1_t)^2} \end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & \dfrac{(n+1)}{1+t}(\ln(1+t))^n \\ v(t) & = & -\dfrac{1}{1+t}. \end{array}\right.$$

Comme u et v sont de classe C^1 sur $[0, A]$, on peut intégrer par parties et on a

$$\begin{aligned} \int_0^A g_{n+1}(t)\mathrm{d}t &= \left[-\frac{(\ln(1+t))^{n+1}}{1+t}\right]_0^A + \int_0^A \frac{(n+1)}{1+t}(\ln(1+t))^n \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} + (n+1)\int_0^A g_n(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A g_{n+1}(t)\mathrm{d}t = I_{n+1} \quad \text{et} \quad \lim_{A\to+\infty} \int_0^A g_n(t)\mathrm{d}t = I_n$$

(car I_n et I_{n+1} convergent). De plus,

$$\lim_{A\to+\infty} -\frac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} = 0$$

par croissances comparées et donc, en passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtient bien

$$I_{n+1} = (n+1)I_n.$$

(6) Montrons alors, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$.
- <u>initialisation</u>. Pour $n = 0$, on a $I_0 = 1$ et $0! = 1$, donc la formule est vraie.
- <u>hérédité</u>. Supposons que $I_n = n!$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$I_{n+1} = (n+1)I_n = (n+1)n! = (n+1)!,$$

ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence.

Partie III - Une fonction définie par une intégrale

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction F_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$F_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x g_n(t)\mathrm{d}t.$$

(7) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto (1/n!)g_n(x)$ est continue sur $[0; x]$. Ainsi, l'intégrale est bien définie. D'après la Partie précédente et la convergence de l'intégrale I_n, on a

$$\lim_{x\to+\infty} F_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t = 1.$$

(8) En reprenant les calculs visant à calculer I_0, on a, pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_0(x) &= \int_{-\infty}^x f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}\mathrm{d}t \\ &= 1 - \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

(9) En reprenant les calculs faits à la Question (5), (en remplaçant n par $k-1$ et A par x) on obtient :

$$\begin{aligned}
F_k(x) &= \frac{1}{k!}\int_0^x g_k(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{k!}\left(-\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + k\int_0^x g_{k-1}(t)\mathrm{d}t\right) \\
&= -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x g_{k-1}(t)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + F_{k-1}(x),
\end{aligned}$$

et on a donc bien

$$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}.$$

(10) En sommant l'égalité précédente pour k variant de 1 à n on obtient

$$\sum_{k=1}^n (F_k(x) - F_{k-1}(x)) = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x},$$

et donc, par télescopage,

$$F_n(x) - F_0(x) = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x},$$

ce qui donne finalement

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= F_0(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} \\
&= 1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}.
\end{aligned}$$

(11) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé. En reconnaissant une série exponentielle de paramètre $\ln(1+x)$, on a

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} = \frac{1}{1+x}\sum_{k=0}^n \frac{(\ln(1+x))^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+x} \times \exp\left(\ln(1+x)\right) = 1.$$

et il suit que

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1 - 1 = 0.$$

Exercice 3 - Inspiré par EDHEC 2019

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches, dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, **sans remise**, jusqu'à l'apparition de la boule noire.

Pour chaque i de $[\![1, n-1]\!]$, on note B_i l'événement : "le i-ème tirage donne une boule blanche", et on pose $\overline{B_i} = N_i$. Enfin, on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.

Partie I - Simulation informatique

On rappelle qu'en `SciLab`, la commande `grand(1,1,'uin',a,b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$.

(1) On complète le programme comme suit:

```
function [x,y]=XY(n)
nB=n-1
x=1
y=0 // on a pas encore pioché la boule numéro 1
u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
while u<nB+1
        nB=nB-1 //une boule blanche en moins
        if u==1 then y=1 // si c'est la boule 1
        end
        u=grand(1,1,'uin',1, nB+1) // il y a toujours nB+1 boules dans l'urne
        x=x+1 //un tirage de plus
end
endfunction
```

(2) On génère un échantillon de taille 1000 du couple (X, Y). Pour calculer la covariance, on utilise des opérations pointées ainsi que la définition.

```
covXY=mean((X-mean(X)).*(Y-mean(Y)))
```

(3) En rentrant $n = 4$, le programme affiche `0.449475`. Ainsi la covariance n'est pas nulle. ON peut conjecturer que X et Y ne sont pas indépendantes, du moins pour $n = 4$.

(4) Dans les quatre figures, les bâtons représentent les *fréquences* observées des valeurs 0 et 1 (pour différentes valeurs de n) lors de répétitions de 1000 expériences. Les deux hauteurs semblent à chaque fois égales. On peut donc conjecturer que

$$Y \hookrightarrow B\left(\frac{1}{2}\right)$$

(ou - car c'est finalement la même chose - que $Y \hookrightarrow U([\![0; 1]\!])$).

Partie II - Loi conjointe de X et Y

(5) Au mieux $X = 1$ (on pioche la noire dès le premier tirage), au pire $X = n$ (on la pioche après avoir vidé l'urne de toutes les blanches) et toutes les valeurs intermédiaires sont possibles, donc $X(\Omega) = [\![1; n]\!]$.

(6) (a) Si on sait $B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{i-1}$, pour le i-eme tirage, il reste $n - (i - 1)$ boules dans l'urne, dont une boule noire. Donc

$$P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n - (i-1) - 1}{n - (i-1)} = \frac{n-i}{n-i+1}.$$

(b) $(X = k)$ est l'événement $B_1 \cap \ldots B_{k-1} \cap N_k$. En utilisant la formule des probabilités composées

$$P(X = k) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \ldots \times \frac{n-(k-1)}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}$$

par télescopage multiplicatif. Au final, on a

$$\forall n \in [\![1; n]\!], \qquad P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

(c) On a reconnu une loi uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$. Les formules du cours donnent directement

$$E(X) = \frac{n+1}{2}, \qquad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

(7) (a) Soit $k \in [\![1;n]\!]$. L'évènement $([X=k] \cap [Y=0])$ signifie que les $k-1$ boules blanches tirées sont toutes numérotées 0. En s'inspirant de ce qu'on a fait précédemment, on introduit les évènements B'_i :"le i-eme tirage donne une boule blanche numérotée 0". Alors,

$$[X=k] \cap [Y=0] = B'_1 \cap B'_2 \cap \ldots \cap B'_{k-1} \cap N_k.$$

La formule des probabilités composées donne alors

$$\begin{aligned} P\left([X=k] \cap [Y=0]\right) &= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-4}{n-2} \times \ldots \times \frac{n-k}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} \\ &= \frac{n-k}{n(n-1)} \qquad \text{(par télescopage)} \end{aligned}$$

(b) Par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{(X=k) : \ k \in [\![1;n]\!]\}$, on a

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= \sum_{k=1}^{n} P([X=k] \cap [Y=0]) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (n-k) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=0}^{n-1} j \qquad \text{(changement d'indice : } j = n-k) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \times \frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Comme $Y(\Omega) = \{0;1\}$, il suit que $P(Y=1) = 1/2$. Mais alors, également par la formule des probabilités totales cette fois appliquée au s.c.e $\{(Y=0);(Y=1)\}$, on a

$$\begin{aligned} P([X=k] \cap [Y=1]) &= P(X=k) - P([X=k] \cap [Y=0]) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{n-k}{n(n-1)} \\ &= \frac{k-1}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

(c) On a reconnu pour Y une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ ou bien une loi uniforme sur $[\![0;1]\!]$ comme conjecturé en première partie. Les formules du cours donnent

$$E(Y) = \frac{1}{2}, \qquad V(Y) = \frac{1}{4}.$$

(d) Les variables X et Y sont pas indépendantes, ce qu'on voit par exemple avec

$$P([X=1] \cap [Y=1]) = 0 \neq \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} = P(X=1) \times P(Y=1).$$

Partie III - Un calcul de covariance

(8) (a) C'est la formule du triangle de Pascal

$$\binom{k}{j} + \binom{k}{j+1} = \binom{k+1}{j+1},$$

ou encore

$$\binom{k}{j} = \binom{k+1}{j+1} - \binom{k}{j+1}.$$

(b) Cette question est classique (voir par exemple **ECRICOME 2017**, Exercice 3), elle peut aussi se traiter par récurrence. Ici, on propose un calcul direct, *via* somme télescopique.

$$\begin{aligned}\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} &= \sum_{k=j}^{n} \left(\binom{k+1}{j+1} - \binom{k}{j+1} \right) \\ &= \binom{n+1}{j+1} - \binom{j}{j+1} \qquad \text{(par télescopage)} \\ &= \binom{n+1}{j+1} \qquad \left(\text{car } \binom{j}{j+1} = 0\right)\end{aligned}$$

(c) On utilise la formule précédente avec $j = 2$. Comme, pour $k \geq 2$

$$\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2},$$

on obtient

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1) = 2\binom{n+1}{3} = 2\frac{(n+1)n(n-1)}{6} = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}.$$

(9) D'après le théorème de transfert

$$\begin{aligned}E(XY) &= \sum_{k=1}^{n} j = 0^1 kjP([X=k] \cap [Y=j]) \\ &= \sum_{k=1}^{n} kP([X=k] \cap [Y=1]) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{(k-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} k(k-1) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \times \frac{n(n-1)(n+1)}{3} \\ &= \frac{n+1}{3},\end{aligned}$$

ce qui est bien ce qu'on attendait.

(10) Par la formule de König-Huyguens,

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= \frac{n+1}{3} - \frac{n+1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{4n+4-3n-3}{12} \\ &= \frac{n+1}{12}.\end{aligned}$$