ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Concours Blanc n°3

Sujet type **EDHEC**
Mardi 3 Décembre 2018
Durée : 4 heures

Exercice 1

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $E = \mathcal{M}_{3,1}$.

(1) (a) Déterminer $(A - I)^2$.
(b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.

(2) On pose $A = N + I$.
(a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N, puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.
(b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

(3) On pose $u_1 = (A - I)(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.
(a) Montrer que l'ensemble $E_1 = \{X \in E : (A - I)X = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E et que (u_1, u_2) en est une base.
(b) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.
(c) On note T la matrice dont les colonnes sont respectivement les coordonnées de Au_1, Au_2 et Ae_1 dans la base (u_1, u_2, e_1). Expliciter T.

(4) Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible puis que $A = PTP^{-1}$.

(5) On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que, pour tout (i, j) de $[\![1, 3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1.

(a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.

(b) Soit N une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :
$$NA = AN \iff (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP)$$

(c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille :
$$(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}).$$

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches, dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, **sans remise**, jusqu'à l'apparition de la boule noire.

Pour chaque i de $[\![1, n-1]\!]$, on note B_i l'événement : "le i-ème tirage donne une boule blanche", et on pose $\overline{B_i} = N_i$. Enfin, on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

(1) Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.

(2) (a) Pour tout i de $[\![2, n-1]\!]$, justifier que
$$P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}.$$

(b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $P(X = k)$, pour tout k de $X(\Omega)$.

(c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

(3) On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.

(a) Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que
$$P\Big([X = k] \cap [Y = 0]\Big) = \frac{n-k}{n(n-1)}.$$

(b) En déduire $P(Y = 0)$.

(c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.

(4) Simulation informatique.
On rappelle qu'en `SciLab`, la commande `grand(1,1,'uin',a,b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$.

(a) Compléter le script `SciLab` suivant afin qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X.
On admettra que la boule noire est codée tout au long de ce script par le nombre `nB+1`, où `nB` désigne le nombre de boules blanches.

```
n=input('n=?')
nB=n-1
X=1
u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
while u<nB+1
        nB=...............
        u=grand(1,1,'uin',1,................)
        X=.................
end
disp(X)
```

(b) Compléter les lignes 4 et 8 ajoutées au script précédent afin que le script qui suit renvoie et affiche, en plus de celle prise par X, la valeur prise par Y.

```
1  n=input('n=?')
2  nB=n-1
3  X=1
4  Y=................
5  u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
6  while u<nB+1
7          nB=...........
8          if u==1 then Y=..............
9          end
10         u=grand(1,1,'uin',1,........)
11         X=.............
12 end
13 disp(X)
14 disp(Y)
```

Exercice 3

Pour chaque entier naturel n , on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in [n, +\infty[\ , \ f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} \mathrm{d}t.$$

Partie I - Étude de f_n

(1) Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n.

(2) En minorant $f_n(x)$, établir que

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

(3) En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté u_n, élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

Partie II - Étude de la suite (u_n)

(4) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

(5) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}.$$

(6) (a) Utiliser la Question (5) pour compléter les commandes SciLab suivantes afin qu'elles permettent d'afficher un entier naturel n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

```
n=0;
while ........................
    n=........................
end
disp(n)
```

(b) Le script affiche l'une des trois valeurs $n = 55$, $n = 70$ et $n = 85$. Préciser laquelle en prenant $2,3$ comme valeur approchée de $\ln(10)$.

(7) On pose $v_n = u_n - n$.

(a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

(b) Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1, on a : $\sqrt{1+x} \leq 1 + \dfrac{x}{2}$.

(c) Vérifier ensuite que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}).$$

(d) Déduire de l'encadrement obtenu à la Question (5) que

$$u_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}.$$

Problème

Partie I - Questions préliminaires

Dans cette partie, x désigne un réel élément de $[0,1[$.

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0,x]$, simplifier la somme $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

(2) En déduire que

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \mathrm{d}t$$

(3) Établir par encadrement que l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \mathrm{d}t = 0$$

(4) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

(5) Soit $m \in \mathbb{N}$ fixé. À l'aide de la formule du triangle de Pascal, établir l'égalité:

$$\forall q \geq m,\ \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}.$$

(6) Soit n un entier naturel non nul. On considère une suite (X_n) de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre x, et on pose

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n.$$

(a) Déterminer $S_n(\Omega)$ puis établir que, pour tout entier $k \geq n+1$, on a:

$$\mathrm{P}\left(S_{n+1} = k\right) = \sum_{j=n}^{k-1} \mathrm{P}((S_n = j) \cap (X_{n+1} = k-j)).$$

(b) En déduire, par récurrence sur n , que la loi de S_n est donnée, pour tout entier $k \geq n$, par

$$P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n}.$$

(c) En déduire, pour tout réel $x \in]0,1[$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}.$$

(d) On rappelle que la commande `grand(1, n, 'geom', p)` permet à `SciLab` de simuler n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre p. Compléter les commandes `SciLab` suivantes pour qu'elles simulent la variable aléatoire S_n.

```
n=input('n=?')
S=..........................
disp(S)
```

Partie II - Étude d'une variable aléatoire

Dans cette partie, on désigne par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1-p$. On considère la suite (u_k), définie, pour $k \in \mathbb{N}^*$, par

$$u_k = -\frac{q^k}{k\ln(p)}.$$

(7) (a) Vérifier que la suite (u_k) est à termes positifs.

(b) Montrer, en utilisant un résultat de la Partie I, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$.

On considère dorénavant une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X=k) = u_k.$$

(8) (a) Montrer que X possède une espérance et la déterminer.

(b) Montrer également que X possède une variance et vérifier que:

$$V(X) = -\frac{q(q+\ln(p))}{(p\ln(p))^2}.$$

(9) Soit k un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire Y dont la loi, conditionnellement à l'évènement $(X=k)$, est la loi binomiale de paramètres k et p.

(a) Montrer que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ puis utiliser la formule des probabilités totales, ainsi que la Question (1) de la Partie I, pour montrer que :

$$\mathrm{P}\left(Y=0\right) = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}.$$

(b) Après avoir montré que, pour tout couple $(k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on

$$\frac{\binom{k}{n}}{k} = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{n},$$

établir que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathrm{P}\left(Y=n\right) = -\frac{p^n q^n}{n\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (q^2)^{k-n}.$$

En déduire, grâce à la Question (3) de la première partie, l'égalité

$$\mathrm{P}\left(Y=n\right) = -\frac{q^n}{n(1+q)^n \ln(p)}.$$

(c) Vérifier que l'on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=k) = 1$.

(d) Montrer que Y possède une espérance et donner son expression en fonction de $\ln(p)$ et q.

(e) Montrer aussi que Y possède une variance et que l'on a

$$V(Y) = -\frac{q(q+(1+q\ln(p))}{(\ln(p))^2}.$$