ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Concours Blanc n°3

Sujet type **EDHEC**
Lundi 2 Décembre 2018
Solution

Exercice 1 - D'après EDHEC 2019

On considère les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $E = \mathcal{M}_{3,1}$.

(1) (a) Le calcul donne
$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
et, sans difficulté $(A-I)^2 = 0$.

(b) Comme A et I commutent, le développement (de l'identité remarquable) donne
$$A^2 - 2A + I = 0 \iff 2A - A^2 = I \iff A \cdot (2I - A) = I.$$
Ainsi, on en déduit que A est inversible et que
$$A^{-1} = 2I - A.$$

(2) On pose $A = N + I$.

(a) La matrice $N = A - I$ est nilpotente (d'ordre 2) d'après la question précédente. Il suit, comme A et I commutent, d'après la *formule du binôme*, que
$$\begin{aligned} A^n &= (N+I)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} N^k I^{n-k} = \sum_{k=0}^{1} N - k \\ &= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N = I + nN. \end{aligned}$$
Comme $N = A - I$, il suit que
$$A^n = I + n(A - I) = nA - (n-1)I.$$

(b) Pour $n=-1$, l'expression ci-dessus donne

$$-A-(-1-1)I=2I-A,$$

ce qui est bien l'expression trouvée plus haut pour A^{-1}. La formule est donc vraie pour $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq -1$.

(3) On pose $u_1=(A-I)(e_1)$ et $u_2=e_1+e_3$. Commençons par voir que

$$u_1=N\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},\quad \text{et}\quad u_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(a) On résout.

$$\begin{aligned}
X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_1 &\iff NX=0\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl}-x+y+z&=&0\\-2x+2y+2z&=&0\\x-y-z&=&0\end{array}\right.\\
&\iff x=y+z\\
&\iff X=\begin{pmatrix}y+z\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$E_1=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},u_2\right),$$

ce qui permet d'affirmer que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (donc un espace vectoriel) mais ce n'est pas encore tout à fait ce que l'on veut. On observe alors que

$$u_1=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+u_2$$

D'après les propriétés du cours, on peut alors écrire

$$E_1=\mathrm{Vect}(u_1,u_2).$$

La famille (u_1,u_2) est alors génératrice de E_1 et les vecteurs étant clairement non colinéaires, ils forment une famille libre et donc une base de E_1 (qui est alors de dimension 2).

(b) La famille (u_1,u_2,e_1) étant composée de 3 vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3, il suffit de montre qu'elle est libre pour qu'elle en forme une base.

$$\begin{aligned}
\alpha u_1+\beta u_2+\gamma e_1=0 &\iff \left\{\begin{array}{rcl}-\alpha+\beta+\gamma&=&0\\-2\alpha&=&0\\\alpha+\beta&=&0\end{array}\right.\\
&\iff \alpha=\beta=\gamma=0
\end{aligned}$$

La famille (u_1,u_2,e_1) est bien libre et forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(c) Comme u_1 et u_2 sont éléments de E_1, on a $Au_1 = u_1$ et $Au_2 = u_2$. Les deux premières colonnes de T sont donc

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Mais, $(A-I)e_1 = u_1$ donc $Ae_1 = u_1 + e_1$ et la troisième colonne est alors égale à $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Au final,

$$T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(4) Soit la matrice $P = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\-2 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Il suffit normalement de dire que les colonnes de P forment une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour que celle-ci soit inversible (car l'endomorphisme associé a donc une image de rang 3 ...).

N'ayant pas encore revu ces notions au moment où l'on écrit cette correction; on propose un autre argument, à partir du Pivot de Gauss. Notant (L_i) les lignes de P, l'opération $(L_3) \leftarrow (L_3) - (L_1)$ mène a une matrice triangulaire sans zéro sur la diagonale. Un pivot de Gauss partiel est donc possible et la matrice P est inversible.

Naturellement, si l'on poursuit le pivot de Gauss jusqu'au bout, on obtient P^{-1} et c'est bien, mais c'est long et on ne demande pas de calculer P^{-1}, on économise donc du temps en justifiant seulement de l'inversibilité de P.

Comme P est inversible, $A = PTP^{-1}$ revient à montrer que $AP = TP$. C'est un calcul que l'on vérifie:

$$AP = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\-2 & 0 & -2\\1 & 1 & 1\end{pmatrix} = PT.$$

(5) On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que, pour tout (i,j) de $[\![1,3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1.

(a) Notons $C_T = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \ MT = TM\}$. Déterminons une famille génératrice pour commencer.

$$M = \begin{pmatrix}x & y & z\\u & v & w\\a & b & c\end{pmatrix} \in C_T \iff \begin{pmatrix}x & y & z\\u & v & w\\a & b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y & z\\u & v & w\\a & b & c\end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & x+a\\ y & = & y+b\\ x+z & = & z+c\\ u & = & u\\ u+w & = & w\\ a & = & a\\ b & = & b\\ a+c & = & c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} b & = & 0\\ x & = & c\\ u & = & 0\\ a & = & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi,

$$M \in C_T \iff M = \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & v & w \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = x(E_{1,1} + E_{3,3}) + zE_{1,3} + vE_{2,2} + wE_{2,3}$$

Ainsi, on a bien

$$C_T + \mathrm{Vect}\,(E_{1,1} + E_{3,3};\ E_{1,3};\ E_{2,2};\ E_{2,3})$$

et la famille considérée est bien génératrice de C_T. Celle-ci étant clairement libre (le système est trivial), elle forme une base de C_T qui est donc de dimension 5.

(b) Soit N une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Comme $A = PTP^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} NA = AN &\iff NPTP^{-1} = PTP^{-1}N \\ &= P^{-1}NPTP^{-1} = P^{-1}PTP^{-1}N = TP^{-1}N \\ &= P^{-1}NPT = TP{-}1NP, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(c) Notons alors C_A le sous-espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ formé des matrices qui commutent avec A. D'après ce qu"on vient d'écrire

$$N \in C_A \iff P^{-1}NP \in C_T$$

Mais on connait une base de C_T. Il suit que

$$\begin{aligned} N \in C_A &\iff \exists x, z, v, w \in \mathbb{R}, \quad P^{-1}NP = x(E_{1,1} + E_{3,3}) + zE_{1,3} + vE_{2,2} + wE_{2,3} \\ &\iff \exists x, z, v, w \in \mathbb{R}, \quad N = P\left(x(E_{1,1} + E_{3,3}) + zE_{1,3} + vE_{2,2} + wE_{2,3}\right)P^{-1} \\ &\iff \exists x, z, v, w \in \mathbb{R}, \quad N = xP(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1} + zPE_{1,3}P^{-1} + vPE_{2,2}P^{-1} + wPE_{2,3}P^{-1} \end{aligned}$$

et la famille :

$$(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}).$$

engendre bien C_A.

Exercice 2 - D'après EDHEC 2019

(1) Au mieux $X = 1$ (on pioche la noire dès le premier tirage), au pire $X = n$ (on la pioche après avoir vidé l'urne de toutes les blanches) et toutes les valeurs intermédiaires sont possibles, donc $X(\Omega) = [\![1; n]\!]$.

(2) (a) Si on sait $B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{i-1}$, pour le i-eme tirage, il reste $n - (i-1)$ boules dans l'urne, dont une boule noire. Donc

$$P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n - (i-1) - 1}{n - (i-1)} = \frac{n-i}{n-i+1}.$$

(b) $(X = k)$ est l'événement $B_1 \cap \ldots B_{k-1} \cap N_k$. En utilisant la formule des probabilités composées

$$P(X = k) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \ldots \times \frac{n-(k-1)}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}$$

par télescopage multiplicatif. Au final, on a

$$\forall n \in [\![1; n]\!], \qquad P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

(c) On a reconnu une loi uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$. Les formules du cours donnent directement

$$E(X) = \frac{n+1}{2}, \qquad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

(3) (a) Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. L'évènement $([X = k] \cap [Y = 0])$ signifie que les $k-1$ boules blanches tirées sont toutes numérotées 0. En s'inspirant de ce qu'on a fait précédemment, on introduit les évènements B'_i :"le i-eme tirage donne une boule blanche numérotée 0". Alors,

$$[X = k] \cap [Y = 0] = B'_1 \cap B'_2 \cap \ldots \cap B'_{k-1} \cap N_k.$$

La formule des probabilités composées donne alors

$$\begin{aligned} P([X = k] \cap [Y = 0]) &= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-4}{n-2} \times \ldots \times \frac{n-k}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} \\ &= \frac{n-k}{n(n-1)} \qquad \text{(par télescopage)} \end{aligned}$$

(b) Par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{(X = k) : \ k \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$, on a

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= \sum_{k=1}^{n} P([X = k] \cap [Y = 0]) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (n-k) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=0}^{n-1} j \qquad \text{(changement d'indice : } j = n-k) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \times \frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Comme $Y(\Omega) = \{0; 1\}$, il suit que $P(Y = 1) = 1/2$.

(c) On a reconnu pour Y une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ ou bien une loi uniforme sur $\llbracket 0; 1 \rrbracket$. Les formules du cours donnent

$$E(Y) = \frac{1}{2}, \qquad V(Y) = \frac{1}{4}.$$

(d) Les variables X et Y sont pas indépendantes, ce qu'on voit par exemple avec

$$P([X = 1] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{n} \neq \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} = P(X = 1) \times P(Y = 0).$$

(4) Simulation informatique.

(a) On complète comme suit

```
n=input('n=?')
nB=n-1
X=1
u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
while u<nB+1
        nB=nB-1 // une boule blanche en moins
        u=grand(1,1,'uin',1, nB+1) // il y a toujours nB+1 boules dans l'urne
        X=X+1 //un tirage nécessaire de plus
end
disp(X)
```

(b) Sans difficulté, on complète les deux lignes qui diffèrent du premier programme.

```
Y=0 // boule numéro 1 pas encore tirée

if u==1 then Y=1 // si on pioche la boule 1, Y=1
```

Exercice 3 - D'après EDHEC 2016

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n par

$$\forall x \in [n, +\infty[, \qquad f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} \mathrm{d}t.$$

(1) Étude de f_n.

(a) D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $t \to e^{\sqrt{t}}$ étant continue sur $[0, +\infty[$, f_n est sa primitive sur $[0, +\infty[$ qui s'annule en $x = n$. Il suit que f_n est donc de classe C^1 et que, pour tout $x \in [n, +\infty[$,

$$f_n'(x) = e^{\sqrt{x}} > 0.$$

Sa dérivée étant strictement positive, f_n est strictement croissante sur $[n, +\infty[$.

(b) Pour tout $x \in [n, +\infty[$, $e^{\sqrt{t}} > 1$. En intégrant sur $[n, x]$ (avec $n \leq x$), on obtient (par positivité de l'intégrale)

$$\forall x \in [n, +\infty[\ , \ f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} \mathrm{d}t > \int_n^x 1 \mathrm{d}t = x - n.$$

Comme $(x - n) \to +\infty$ (lorsque $x \to +\infty$), par comparaison, on a

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

(c) On utilise le théorème de la bijection. f_n est continue et strictement croissante sur $[n, +\infty[$, $f_n(n) = 0$ et $f_n(x) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$ donc f_n réalise une bijection de $[n, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

Comme $1 \in [0, +\infty[$, il admet un unique antécédent par f_n, noté u_n et appartenant à $[n, +\infty[$, et ainsi $f_n(u_n) = 1$.

(2) Étude de la suite (u_n).

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [n, +\infty[$, donc $u_n \geq n$ et, par comparaison

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

(b) Par définition de u_n,

$$f_n(u_n) = \int_n^{u_n} e^{\sqrt{t}} \mathrm{d}t = 1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq n$ et tout$t \in [n, u_n]$,

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{n}} &\leq e^{\sqrt{t}} \\ &\leq e^{\sqrt{u_n}} \end{aligned}$$

Comme $n \leq u_n$, il suit que

$$\int_n^{u_n} e^{\sqrt{n}} \mathrm{d}t \leq \int_n^{u_n} e^{\sqrt{t}} dt \leq \int_n^{u_n} e^{\sqrt{u_n}} \mathrm{d}t.$$

Et donc

$$(u_n - n)e^{\sqrt{n}} \leq f_n(u_n) = 1 \leq (u_n - n)e^{\sqrt{u_n}}$$

En divisant l'inégalité de gauche par $e^{\sqrt{n}}$ et celle de droite par $e^{\sqrt{u_n}}$, on obtient bien

$$e^{-\sqrt{u_n}} \leq (u_n - n) \leq e^{-\sqrt{n}}.$$

(3) (a) Puisque 2b) donne

$$0 \leq (u_n - n) \leq e^{-\sqrt{n}},$$

on aura $(u_n - n) \leq 10^{-4}$ dès que $e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4}$, on va donc à partir de $n = 0$, *incrémenter* n, tant que $e^{-\sqrt{n}} > 10^{-4}$.

```
n=0
while  (exp(-sqrt(n))> 10^(-4))
    n=n+1
end
disp(n)
```

(b) On a

$$e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4} \iff -\sqrt{n} \leq -4\ln(10) \iff n \geq (4\ln(10))^2 \simeq 16.(2.3)^2 \simeq 84.64.$$

Le script précédent va donc afficher pour n la valeur 85.

(4) $v_n = u_n - n$.

(a) D'après 2b),

$$0 \leq (u_n - n) \leq e^{-\sqrt{n}},$$

et comme

$$\lim_{n \to +\infty} e^{-\sqrt{n}} = 0,$$

on a par encadrement aussi

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} (u_n - n) = 0.$$

(b) Soit $x \geq -1$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2} &\iff 1 + x \leq (1 + \frac{x}{2})^2 \qquad \text{(croissance de } t \to t^2 \text{ sur } \mathbb{R}^+) \\ &\iff 1 + x \leq 1 + x + \frac{x^2}{4} \qquad \text{(ce qui est vrai.)} \end{aligned}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}) &\iff e^{-\sqrt{u_n}+\sqrt{n}} \geq \exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}) \qquad \text{(croissance de } t \to t^2 \text{ sur } \mathbb{R}^+) \\ &\iff \sqrt{u_n} - \sqrt{n} \leq \frac{v_n}{2\sqrt{n}} \qquad \text{(décroissance de } t \to e^{-t}) \\ &\iff \sqrt{v_n + n} \leq \sqrt{n} + \frac{v_n}{2\sqrt{n}} \qquad \text{car } (u_n = v_n + n) \\ &\iff \sqrt{\frac{v_n}{n} + 1} \leq 1 + \frac{v_n}{2n} \qquad \text{(division par } \sqrt{n} > 0) \end{aligned}$$

Comme $\frac{v_n}{n} \geq 0$, la dernière inégalité est vérifiée en vertu du 4b) et donc la première aussi.

(d) On divise l'encadrement obtenu en 2b) par $e^{-\sqrt{n}}$, ce qui donne

$$\frac{e^{-\sqrt{u_n}}}{e^{-\sqrt{n}}} \leq \frac{(u_n - n)}{e^{-\sqrt{n}}} \leq 1.$$

Et donc, en utilisant 4c),

$$\exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}) \leq \frac{e^{-\sqrt{u_n}}}{e^{-\sqrt{n}}} \leq \frac{(u_n - n)}{e^{-\sqrt{n}}} \leq 1.$$

Comme $v_n \to 0$, on a aussi

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{v_n}{2\sqrt{n}} = 0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}) = 1,$$

qui fournit (par encadrement)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(u_n - n)}{e^{-\sqrt{n}}} = 1.$$

par conséquent:

$$u_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}.$$

Problème

Une solution proposée (et tapée) par M.Dudognon et L.Foubert.

Partie I - Questions préliminaires

(1) a) Il s'agit de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison t :
Pour tout $t \in [0, x] \subset [0, 1[$, on a $t \neq 1$ donc : $\sum\limits_{p=1}^{n} t^{p-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$

b) On intègre l'égalité précédente sur $[0, x]$,où les fonctions sont continues :

$$\int_0^x (\sum_{p=1}^{n} t^{p-1})dt = \int_0^x \frac{1 - t^n}{1 - t} dt.$$

et par linéarité de l'intégrale :

$$\sum_{p=1}^{n} (\int_0^x t^{p-1}dt) = \int_0^x \frac{1}{1 - t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt.$$

et enfin

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

c) Pour $t \in [0,x] \subset [0,1[$, on a : $0 \le t \le x$ et $0 < 1-x \le 1-t$ d'où $0 \le \dfrac{1}{1-t} \le \dfrac{1}{1-x}$

et en multipliant par $t^n \ge 0$: $0 \le \dfrac{t^n}{1-t} \le \dfrac{t^n}{1-x}$ sur $[0,x]$.

Or $0 \le x$, donc en intégrant sur $[0,x]$,on obtient : $\boxed{0 \le \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \mathrm{dt} \le \int_0^x \frac{t^n}{1-x} \mathrm{dt}}$.

Et comme

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-x} dt = \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n dt = \frac{1}{1-x}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \frac{1}{1-x}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

$(\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$ car $x \in [0,1[)$,

par le théorème d'encadrement (sur les limites en n), on a aussi : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0.}$

d) Par conséquent :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \underset{n\to+\infty}{\to} -ln(1-x)$$

Le série de terme général $\left(\frac{x^p}{p}\right)_{p\ge1}$ est donc convergente de somme : $\boxed{\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -ln(1-x)}$.

(2) Par récurrence sur q avec initialisation en $q = m$: $\sum\limits_{k=m}^{m} \binom{k}{m} = \binom{m}{m} = \binom{m+1}{m+1}$.

Et pour hérédité : $\sum\limits_{k=m}^{q+1} \binom{k}{m} = \sum\limits_{k=m}^{q} \binom{k}{m} + \binom{q+1}{m} = \binom{q+1}{m+1} + \binom{q+1}{m} = \binom{q+2}{m+1}$.

On rappelle la formule du “triangle de Pascal” : $\binom{q}{m} + \binom{q}{m+1} = \binom{q+1}{m+1}$, pour tout couple (m,q) d'entiers naturels tels que $0 \leqslant m \leqslant q-1$.

(3) `On a` $(n,k) \in \mathbb{N}^*$, $X_k(\Omega) = \mathbb{N}^*$ avec $P(X_k = j) = x.(1-x)^{j-1}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

(a) Comme $X_k \ge 1$,on a $S_n = \sum_{k=1}^n X_k \ge n$ et donc $\boxed{S_n(\Omega) = [[n,+\infty[[}$.

Pour $k \ge n+1$, la loi de la somme de 2 variables aléatoires donne :

$$\begin{aligned}
(S_{n+1} = k) &= (S_n + X_{n+1} = k) = \bigcup_{j=1}^{k-1} (S_n = j \cap X_{n+1} = k-j) \text{ (incompatibles)} \\
\mathrm{P}(S_{n+1} = k) &= \sum_{j=n}^{k-1} \mathrm{P}((S_n = j) \cap (X_{n+1} = k-j)) \text{ car } (S_n = j) = \emptyset \text{ ,si } j < n).
\end{aligned}$$

(b) Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$

$$P(n) \qquad \forall k \in [\![n,+\infty]\!], \qquad P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n}.$$

<u>initialisation</u> $n = 3$

$\forall$k $\in [[1,+\infty[[$: $\mathrm{P}(S_1 = k) = \dbinom{k-1}{0}.x^1(1-x)^{k-1} = x(1-x)^{k-1}$ qui est bien vérifiée car $S_1 = X_1$.

hérédité si $k \geq n+1$:

$$\mathrm{P}\left(S_{n+1}=k\right) = \sum_{j=n}^{k-1} \mathrm{P}\left(S_n=j\right) \mathrm{P}\left(X_{n+1}=k-j\right) \text{ (par indépendance de } S_n \text{avec } X_{n+1}).$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(S_{n+1}=k\right) &= \textstyle\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}.x^n(1-x)^{j-n}.x.(1-x)^{k-j-1} && \text{en supposant P(n) vraie.}\\
&= \textstyle\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}.x^{n+1}(1-x)^{k-n-1}\\
&= x^{n+1}(1-x)^{k-n-1}\textstyle\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1} = x^{n+1}(1-x)^{k-(n+1)}.\binom{k-1}{n} && \text{qui est P(n+1) .}
\end{aligned}$$

En effet la formule du 2 s'écrit : $\sum\limits_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}=\binom{n-1}{n-1}+\binom{n}{n-1}+\ldots+\binom{k-2}{n-1}=\binom{k-1}{n}$

(c) Comme $S_n(\Omega)=[[n,+\infty[[$:

$$1 = \sum_{k=n}^{+\infty}\mathrm{P}\left(S_n=k\right)=\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}.x^n(1-x)^{k-n}$$

et ,en divisant par $x \neq 0$:

$$\frac{1}{x^n} = \textstyle\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}(1-x)^{k-n}$$

(d)
```
n=input('entrez une valeur de n supérieure à 1:')
s=sum(grand(1,n,'geom',x);disp(S),
```

Partie II - Étude d'une variable aléatoire

$p \in]0,1[$, $q=1-p \in]0,1[$ et $\forall \mathrm{k} \in \mathbb{N}^*: \ \mathrm{u_k}=-\dfrac{\mathrm{q^k}}{\mathrm{k.ln(p)}}$

(1) .

(a) Avec les conditions de l'énoncé : q^k et $-ln(p)$ sont positifs donc $\boxed{\forall \mathrm{k} \in \mathbb{N}^*: \ \mathrm{u_k}=-\dfrac{\mathrm{q^k}}{\mathrm{k.ln(p)}}>0}$
.

(b) $\sum_{k=1}^{+\infty}u_k=\sum_{k=1}^{+\infty}-\dfrac{q^k}{k.ln(p)}=-\frac{1}{ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{q^k}{k}\underset{*}{=}-\frac{1}{ln(p)}(-\ln(1-q))=1(*:$ (en utilisant le 1d) avec

(2) .

(a) Comme $q \in]0,1[$, la série qui définit $E(X)$ converge (cf **) et

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}k.u_k=-\sum_{k=1}^{+\infty}k.\frac{q^k}{k.ln(p)}=-\frac{1}{ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty}q^k\underset{**}{=}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{ln(p)}}.\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{1-q}}$$

(b) Toujours avec des séries géométriques convergentes :

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{+\infty}k^2P(X=k)=-\sum_{k=1}^{+\infty}k^2.\frac{q^k}{k.ln(p)}=-\frac{1}{ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty}kq^k=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{ln(p)}}.\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{(1-q)^2}}$$

D'où la variance de X :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V(X)} = \quad E(X^2)-E(X)^2 \quad &= -\frac{1}{ln(p)}.\frac{q}{(1-q)^2}-\left(\frac{1}{ln(p)}.\frac{q}{1-q}\right)^2\\
= -\tfrac{1}{ln(p)}.\tfrac{q}{(1-q)^2}\left(1+\tfrac{q}{ln(p)}\right) \quad &= -\frac{1}{ln(p)}.\frac{q}{(p)^2}\left(\frac{ln(p)+q}{ln(p)}\right)\\
= -\tfrac{\mathbf{q}}{(\mathbf{p\ln p})^2}\left(\tfrac{\mathbf{ln(p)+q}}{\mathbf{ln(p)}}\right).
\end{aligned}$$

(3) En notant $Y_{[X=k]}$ la v.a.r Y conditionnée par l'évènement $[X=k]$:

$$\forall n \in [[0,k]] : \ \mathrm{P}_{[\mathrm{X=k}]}(Y=n) = \binom{k}{n}.p^n(1-p)^{k-n} .$$

(a) Comme on a $Y_{[X=k]}(\Omega) = [[0,k]]$ et que $X\ (\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a $\boxed{\mathrm{Y}(\Omega) = \mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y=0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}_{[\mathrm{X=k}]}(Y=0).P(X=k) \quad \text{(formule des probabilités totales).}\\
&= -\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^k.\frac{q^k}{k.ln(p)} \quad = -\frac{1}{ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{q^{2k}}{k}\\
&= -\tfrac{1}{ln(p)}(-ln(1-q^2) = \tfrac{ln(1-q)+ln(1+q)}{ln(p)} = 1 + \tfrac{ln(1+q)}{ln(p)}
\end{aligned}$$

(b) une question de cours ? : $\frac{1}{k}\binom{k}{n} = \frac{1}{k}\frac{k!}{n!(k-n)!} = \frac{(k-1)!}{n.(n-1)!(k-n)!} = \frac{1}{n}\frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-1-(n-1))!} = \frac{1}{n}\binom{k-1}{n-1}$
De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y=n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}_{[\mathrm{X=k}]}(Y=n).P(X=k) \quad \text{(formule des probabilités totales).}\\
&= -\sum_{k=1}^{+\infty}\binom{k}{n}.p^n(q)^{k-n}.\frac{(q)^k}{k.ln(p)}\\
&= -\tfrac{p^nq^n}{ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty}\binom{k}{n}.\frac{q^{2k-2n}}{k}\\
&= -\tfrac{p^nq^n}{ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty}\tfrac{1}{n}\binom{k-1}{n-1}(q^2)^{k-n}\\
&= -\tfrac{p^nq^n}{n.ln(p)}\tfrac{1}{(1-q^2)^n} \quad \text{(le I.3c) avec } x = 1-q^2 \in [0,1[).\\
&= -\tfrac{q^n}{n.ln(p)}\tfrac{1}{(1+q)^n}
\end{aligned}$$

(c)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=n) = P(Y=0) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y=n) = 1 + \frac{ln(1+q)}{ln(p)} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{q^n}{n.ln(p)}\frac{1}{(1+q)^n}$$

$$=1 + \frac{ln(1+q)}{ln(p)} - \frac{1}{ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(\frac{q}{1+q})^n \text{ (on montre que } \frac{q}{1+q} \in [0,1[).$$

$$=1 + \frac{ln(1+q)}{ln(p)} - \frac{1}{ln(p)}(-ln(1-\frac{q}{1+q})) = 1 + \frac{ln(1+q)}{ln(p)} - \frac{1}{ln(p)}(-ln(\frac{1}{1+q}))$$

$$=1$$

(d) les séries géométriques (et dérivées) de raison $\frac{q}{1+q} \in [0,1[$ sont convergentes et :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n.P(Y=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} -n.\frac{q^n}{n\ln(p)}\frac{1}{(1+q)^n}\\
&= -\frac{1}{\ln(p)}\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{q}{1+q})^n\\
&= -\frac{1}{\ln(p)}\frac{q}{1+q}\frac{1}{1-\frac{q}{1+q}}\\
&= -\frac{q}{\ln(p)}.
\end{aligned}$$

(e) On a aussi

$$\begin{aligned}
E(Y^2) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2.P(Y=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} -n^2.\frac{q^n}{n\ln(p)}\frac{1}{(1+q)^n} \\
&= -\frac{1}{\ln(p)}\sum_{n=1}^{+\infty} n(\frac{q}{1+q})^n = -\frac{1}{\ln(p)}\frac{q}{1+q}\frac{1}{(1-\frac{q}{1+q})^2} \\
&= -\frac{q(1+q)}{\ln(p)}.
\end{aligned}$$

D'où la variance de X :

$$\begin{aligned}
V(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 \\
&= -\frac{q(1+q)}{\ln(p)} - \frac{q}{\ln(p)}^2 \\
&= -\frac{q}{\ln(p)}.\left(1+q+\frac{q}{\ln(p)}\right) \\
&= -\frac{q}{\ln(p)}.\left(\frac{(1+q)\ln(p)+q}{\ln(p)}\right) \\
&= -q.\left(\frac{(1+q)\ln(p)+q}{(\ln(p))^2}\right).
\end{aligned}$$