Concours Blanc n°4

Sujet type **EML**/**Ecricome** - version A
Lundi 16 Mars 2020
Solution

Exercice 1

Cet exercice est construit sur une annale d'**ECRICOME 1998**.

Dans cet exercice, on étudie la diagonalisation des matrices carrée d'ordre 3 antisymétriques, c'est à dire vérifiant ${}^tA = -A$.

Dans tout l'exercice, E désigne un espace vectoriel de dimension 3, dont la base canonique est notée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Partie I - Étude d'un cas particulier

On considère, dans cette partie seulement, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de E représenté par A dans la base $\mathcal{B}$ ainsi que les vecteurs u_1, u_2, u_3 définis par

$$u_1 = -2e_1 + e_2 + 2e_3, \qquad u_2 = e_1 + 2e_2 \quad \text{et} \quad u_3 = f(u_2).$$

(1) On résout

$$\begin{aligned} u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f) &\iff Au = 0 \\ &\iff \begin{cases} 2y - z &= 0 \\ -2x - 2z &= 0 \\ x + 2y &= 0 \end{cases} \\ &\iff x = -z = -2y \end{aligned}$$

Il suit que

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}(u_1)$$

Ainsi, u_1 étant non nul, (u_1) forme une base du noyau de f.

(2) Commençons par déterminer les coordonnées de ces vecteurs dans la base canonique. Ensuite, la famille étant composée de trois vecteurs de E (de dimension 3), il suffit de montrer que la famille est libre pour qu'elle forme une base de E. On a

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = f(u_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0 &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2\alpha + \beta + 4\gamma &=& 0 \\ \alpha + 2\beta - 2\gamma &=& 0 \\ 2\alpha + 5\gamma &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2\alpha + \beta + 4\gamma &=& 0 \\ 5\beta &=& 0 \\ \beta + 9\gamma &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{aligned}$$

et la famille est bien libre et forme donc une base de E.

Pour déterminer la matrice de f dans cette base, on exprime les images par f des vecteurs de cette base. On sait déjà que $f(u_1) = 0$ et $f(u_2) = u_3$. Pour le dernier on calcule, *via* les cordonnées dans la base canonique

$$f(u_3) = A \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -18 \\ 0 \end{pmatrix} = -9u_2.$$

Il suit que

$$B = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Soit $\lambda \neq 0$. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} BX = -\lambda X &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -\lambda x &=& 0 \\ -\lambda y - 9z &=& 0 \\ y - \lambda z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y - \lambda z &=& 0 \\ (-9 - \lambda^2)z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff x = y = z = 0 \end{aligned}$$

car $-9 - \lambda^2 \neq 0$. Ainsi, tout réel non nul ne peut pas être valeur propre de B. Comme B est clairement non inversible (première colonne nulle), 0 est la seule valeur propre de B. Comme A et B sont semblables,

$$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B) = \{0\}.$$

(4) La matrice A n'admet qu'une seule valeur propre, de plus le sous-espace associé (qui est le noyau de f) est de dimension 1. Or, $\dim(E) = 3$ donc A n'est pas diagonalisable.

Partie B - Cas général

Soient a, b et c trois réels donnés. On pose alors $s = a^2 + b^2 + c^2$ et on suppose $s \neq 0$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

et g l'endomorphisme de E représenté par M dans la base $\mathcal{B}$.

(5) On calcule

$$M^2 = \begin{pmatrix} -(a^2+b^2) & -bc & ac \\ -bc & -(a^2+c^2) & -ab \\ ac & -ab & -(b^2+c^2) \end{pmatrix},$$

et

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & a(a^2+b^2+c^2) & b(a^2+b^2+c^2) \\ -a(a^2+b^2+c^2) & 0 & c(a^2+b^2=c^2) \\ -b(a^2+b^2+c^2) & -c(a^2+b^2+c^2) & 0 \end{pmatrix} = -sM.$$

(6) On a clairement $M^3 = -sM$, et donc le polynôme $X^3 + sX = X(X^2 + s)$ annule M.

(7) Comme $s > 0$ (car a, b, c ne sont pas tous nuls), le polynôme précédent ne s'annule qu'en 0. Ainsi, la seule valeur propre possible pour M est 0.

(8) Supposons que M soit inversible, il existe donc une matrice inverse M^{-1}. En multipliant la relation $M^3 = -sM$ par M^{-1}, on obtient $M^2 = -sI$, ce qui n'est possible que si $a = b = c = 0$, ce qui n'est pas le cas. Ainsi, M n'est pas inversible.

(9) La matrice M n'est pas inversible, donc 0 est valeur propre et c'est la seule, ainsi

$$\mathrm{Sp}(M) = \{0\}.$$

Si M était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale avec des zéros sur la diagonale (sa seule valeur propre), c'est à dire que M serait nulle (car seule la matrice nulle est semblable à une matrice nulle). Or, ce n'est pas le cas. Donc M n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

Cet exercice a été écrit par mon collègue Sofiane Akkouche (René Cassin, Bayonne). On renvoie à sa page pour la solution: Exercice 2 du DS4.

Exercice 3

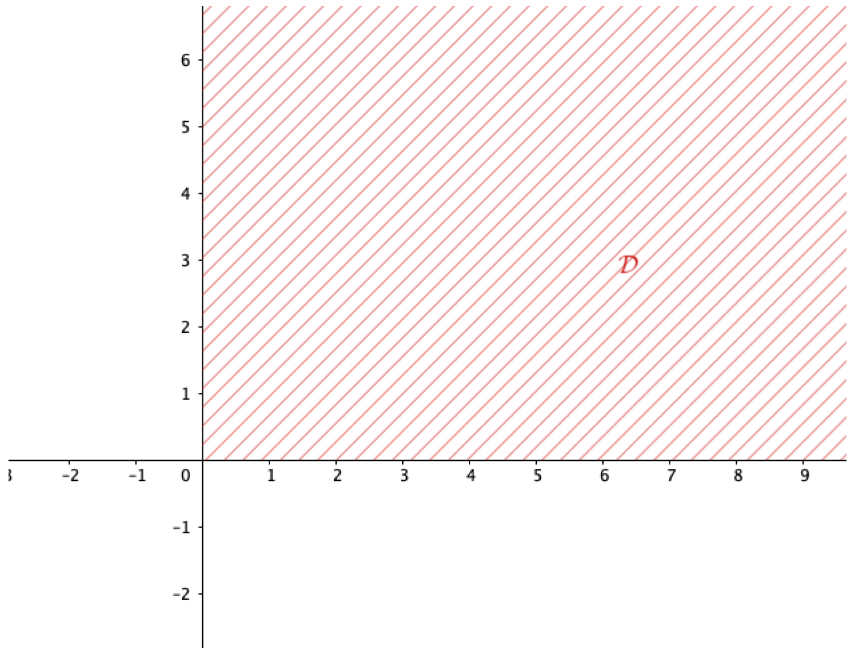
Cet exercice est inspiré d'une annale de **ESCP 2001**.

Partie 1 - Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction G de deux variables réelles définie sur le domaine ouvert $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

$$G(x, y) = \frac{x^2}{2y^2} - \ln x + y - \frac{3}{2}.$$

(1) Il s'agit du *quart de plan* **ouvert** (sans les axes) "en haut à droite".



(2) On a

- $(x,y) \mapsto x^2$ est polynomiale donc $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et *a fortiori* sur $\mathcal{D}$;
- $(x,y) \mapsto 2y^2$ est polynomiale donc $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et *a fortiori* sur $\mathcal{D}$ et ne s'y annule pas.
- **Par quotient**, $(x,y) \mapsto \frac{x^2}{2y^2}$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$;
- $t \mapsto \ln(t)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $(x,y) \mapsto x$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ et, pour tous $(x,y) \in \mathcal{D}$, $x > 0$ donc **par composition**, $(x,y) \mapsto \ln(x)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$;
- $(x,y) \mapsto y - \frac{3}{2}$ polynomiale donc $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et *a fortiori* sur $\mathcal{D}$;

Au final, **par somme**, G est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$.

(3) Sans difficulté,

$$\partial_1 G(x,y) = \frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}, \quad \partial_2 G(x,y) = -\frac{x^2}{y^3} + 1,$$

et

$$\partial^2_{1,1} G(x,y) = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}, \quad \partial^2_{1,2} G(x,y) = \partial^2_{2,1} G(x,y) = -\frac{2x}{y^3}, \quad \partial^2_{2,2} G(x,y) = \frac{3x^2}{y^4}$$

(4) On cherche le(s) point(s) critique(s)

$$\begin{aligned} (x,y) \text{ point critique de } G \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_1 G(x,y) &=& 0 \\ \partial_2 G(x,y) &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{x}{y^2} - \dfrac{1}{x} &=& 0 \\ -\dfrac{x^2}{y^3} + 1 &=& 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2} \Longleftrightarrow x^2 = y^2 \Longleftrightarrow x = y$$

car y et x sont tous deux strictement positifs. En injectant, on obtient

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ point critique de } G &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& y \\ -\dfrac{x^2}{x^3}+1 &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& y \\ \dfrac{1}{x} &=& 1 \end{array}\right. \\
&\iff x = y = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, G admet un unique point critique A de coordonnées $(1,1)$.

(5) On commence par former la matrice hessienne au point critique A. D'après les calculs précédents, on a

$$H = \nabla^2 G(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

On cherche alors les valeurs propres de H à l'aide du déterminant.

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } H &\iff H - \lambda I \text{ non inversible} \\
&\iff \det(H-\lambda I) = 0 \\
&\iff (2-\lambda)(3-\lambda) - 4 = 0 \\
&\iff \lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0 \\
&\iff \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}.
\end{aligned}$$

Comme $\sqrt{17} < \sqrt{25} = 25$, les deux valeurs propres sont strictement positives et G présente un minimum local en A. Ce minimum vaut

$$G(A) = -1.$$

Partie 2 - Une intégrale d'une fonction d'une variable

On considère maintenant la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, par:

$$f(x) = G(x,1) = \frac{x^2}{2} - \ln x - \frac{1}{2}.$$

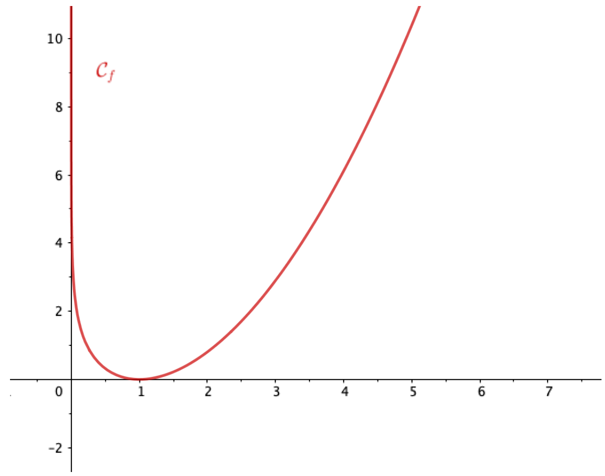
(6) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme combinaison de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^2$. Le calcul de ses dérivées successives donne

$$f'(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}, \qquad f''(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$$

En particulier, comme sa dérivée seconde est strictement positive, on peut conclure que f est convexe. Le tableau de ses variations donne

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(7) Les éléments précédents permettent de tracer l'allure de f



(8) (a) Comme $x \mapsto \ln(x)$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $x > 0$, le *théorème fondamental de l'analyse* affirme que

$$x \mapsto \int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t$$

est une primitive de $x \mapsto \ln(x)$. Une IPP classique donne

$$\int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x \mathrm{d}t = x\ln(x) - x + 1.$$

Toutes les primitives d'une même fonction continue diffèrent d'une constante, on peut donc, par alléger les expressions, choisir $x \mapsto x\ln(x) - x$ comme primitive de $x \mapsto \ln(x)$.

Une primitive de f est également donnée par, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_1^x \left(\frac{t^2}{2} - \ln(t) - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^3}{6} - t\ln(t) + t - \frac{t}{2}\right]_1^x \end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, on s'affranchit des constantes dans le résultat final. Ainsi, une primitive de f est donnée, pour $x > 0$, par l'expression

$$\frac{x^3}{6} - x\ln(x) + \frac{x}{2}.$$

(b) L'intégrale considérée est impropre en 0. Soit donc $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 f(t)\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^3}{6} - t\ln(t) + \frac{t}{2}\right]_\varepsilon^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{\varepsilon^3}{6} + \varepsilon\ln(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} \frac{2}{3} \qquad \text{(par croissance comparée).} \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien la convergence de l'intégrale et de plus $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$.

(c) Le programme donné calcule la moyenne des images par la fonction f d'un $n-$échantillon (avec $n = 10000$) de la loi uniforme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$. D'après le théorème de transfert et la loi faible des grand nombres, il s'agit d'une estimation de

$$E(f(X)) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

C'est le principe de la *méthode de Monte-Carlo*. Il n'est donc pas surprenant que le résultat affiche une valeur approchée de cette intégrale qu'on sait être égale à $2/3$.

Partie 3 - Des sommes de Riemann et une limite

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On pose

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right).$$

(9)

(a) La fonction f est **décroissante** sur $]0;1[$, notamment sur $\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$ (pour $1 \leq j \leq n-1$, on a bien $\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \subset]0;1]$). Ainsi, pour tout $x \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$, on a

$$f\left(\frac{j+1}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{j}{n}\right).$$

Par positivité de l'intégrale,

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{j+1}{n}\right) = \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f\left(\frac{j+1}{n}\right)\mathrm{d}x \leq \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f\left(\frac{j}{n}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}f\left(\frac{j}{n}\right),$$

ce qui est bien l'encadrement voulu.

(b) On somme les inégalités précédentes entre 1 et $n-1$.

- D'une part,

$$\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{j+1}{n}\right) \leq \sum_{j=1}^{n-1}\int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\mathrm{d}x$$

mais

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = S_n - \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc on a bien

$$S_n \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\mathrm{d}x$$

- D'autre part

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{j=1}^{n-1}\int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x \\ &\leq \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{j}{n}\right) \leq S_n\end{aligned}$$

car $\frac{1}{n}f(1) \geq 0$.

Une fois de plus, on a bien l'encadrement demandé.

(c) On explicite la quantité avant de passer à la limite

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2n^2} + \ln(n) - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2n^3} + \frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{2n} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

(d) Comme l'intégrale $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ est convergente, et que $1/n \to 0$, on a que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

D'après la question précédente ainsi que l'encadrement encore ci-avant, le théorème des gendarmes permet de conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{3}.$$

(10) (a) Commençons par voir que

$$f\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{j^2}{2n^2} - \ln\left(\frac{j}{n}\right) - \frac{1}{2}.$$

Il suit que

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n f\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \left(\frac{j^2}{2n^2} - \ln\left(\frac{j}{n}\right) - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2n^3}\sum_{j=1}^n j^2 - \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{j=1}^n \frac{j}{n}\right) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^3} - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b) On déduit de la question précédente que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) &= \frac{1}{2} + S_n - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^3} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{12}{12} = 1. \end{aligned}$$