Concours Blanc n°4

Sujet type **EML/Ecricome** - version B
Lundi 16 Mars 2020
Durée : 4 heures

Exercice 1

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie 1

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe gradué dont l'origine est le point O d'abscisse 0. Au départ (à l'instant $n = 0$), le mobile est situé sur le point O puis il se déplace selon la règle suivante

- À l'instant $n = 1$, il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisses 0 ou 1;
- À l'instant $n = 2$, il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisse 0, 1 ou 2;
- À l'instant $n = 3$, il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisse $0, 1, 2$ ou 3;
- Plus généralement, à l'instant n, il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisse $0,\ 1, ..., n$.

On note, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, T_n l'abscisse du point où le mobile se trouve à l'instant n (on a donc $T_0 = 0$) et on admet que (T_n) est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes. On note Y l'instant du premier **retour** à l'origine.

Par exemple, si les abscisses des points occupés successivement par le mobile sont $T_0 = 0$, $T_1 = 1$, $T_2 = 1$, $T_3 = 2$, $T_4 = 4$, $T_5 = 0$, $T_6 = 5$, ... alors Y prend la valeur 5.

(1) **Simulation informatique**.
On rappelle qu'en `SciLab`, l'instruction `grand(1,1,'uin', a,b)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a;b]\!]$.

(a) Écrire une fonction d'en-tête `function y=T(n)` prenant en argument un entier n et renvoyant une simulation de la variable T_n.

(b) Compléter le script suivant pour qu'il permette de simuler la variable Y.

```
function y=Y()
    y=1
    position = grand(1, 1, 'uin', 0, y)
    while position ..................................
        y=y+1
        position = ..................................
    end
endfunction
```

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Reconnaître la loi de T_n. En déduire la valeur de son espérance.

(3) (a) Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, montrer que $P(T_k \neq 0) = \dfrac{k}{k+1}$.

(b) En déduire que la loi de Y est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

(c) La variable Y admet-elle une espérance?

(4) On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le *taux de panne* de Y à l'instant n, noté λ_n par $\lambda_n = P_{(Y \geq n)}(Y = n)$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lambda_n = \dfrac{P(Y=n)}{P(Y \geq n)}$.

(b) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}.$$

(c) En déduire l'expression, en fonction de n, de $P(Y \geq n)$ puis la valeur de λ_n.

Partie 2

Dans cette partie, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2t}{(1+t^2)^2}, & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

(5) Montrer que f est une densité de probabilité

On considère désormais une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé telle que $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et admettant f comme densité.

(6) Déterminer la fonction de répartition F de X.

(7) Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[0;1[$. Expliciter $F^{-1}(y)$ pour $y \in [0;1[$.

(8) On pose $Y = \dfrac{X^2}{1+X^2}$ et on note G la fonction de répartition de Y.

(a) Déterminer alors $Y(\Omega)$.

(b) Expliciter $G(y)$ pour $y \in [0;1[$ et en déduire la loi suivie par Y.

(c) À l'aide de la question 7, exprimer X en fonction de Y et compléter le script `SciLab` suivant, visant à simuler la variable aléatoire X.

```
function x=X()
    Y=rand()
    x=....................
endfunction
```

(9) Pour tout réel $h > 0$, on introduit la fonction T_h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$T_h(x) = \frac{1}{h} \times P_{[X>x]}(X \leq x+h).$$

(a) Soit $x > 0$ fixé. Montrer que

$$\lim_{h \to 0} T_h(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}.$$

(b) Pour tout réel $x > 0$, on pose $T(x) = \dfrac{f(x)}{1 - F(x)}$. Déterminer explicitement $T(x)$.

(c) Pour tout réel $x > 0$, exprimer l'intégrale

$$\int_0^x T(t)\mathrm{d}t$$

en fonction de $F(x)$ puis la calculer.

Exercice 2

À tout polynôme P de $\mathbb{R}_4[X]$ de la forme $P(X) = X^4 + dX^3 + cX^2 + bX + a$, avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on associe l'unique matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ci-dessous, appelée *matrice compagnon* du polynôme P.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1 & -d \end{pmatrix}$$

On donne alors le résultat suivant, noté $(\star)$ qui sera utilisé et démontré dans cet exercice.

$(\star)$ **Le polynôme P est un polynôme annulateur de sa matrice compagnon C.**

Partie 1 - Étude d'un exemple

On considère **dans cette partie seulement** que le polynôme P est donné par $P(X) = X^4 + X$.

(1) Identifier et expliciter la matrice compagnon de P, notée A.

(2) Montrer que A n'est pas inversible et en déduire, sans calcul, une valeur propre de A.

(3) Calculer A^4. Vérifier alors la validité du résultat $(\star)$.

(4) En déduire les valeurs propres de A.

(5) La matrice A est-elle diagonalisable?

Partie 2 - Utilisation du résultat $(\star)$

On note $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère l'application φ définie par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & x - 2t \\ y + t & z + 2t \end{pmatrix} \end{array}$$

(6) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(7) Montrer que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(8) On note P_B le polynôme de $\mathbb{R}_4[X]$ dont B est la matrice compagnon.

(a) Identifier le polynôme P_B puis vérifier que $P_B(X) = (X^2 - 2X)(X^2 - 1)$.

(b) En déduire, à l'aide du résultat $(\star)$, que les valeurs propres possibles de B sont $\{-1, 0, 1, 2\}$.

(c) On note

$$M_1 = E_{2,2} - E_{1,2}, \quad M_2 = 2E_{1,2} - 3E_{2,1} + E_{2,2},$$
$$M_3 = E_{2,2} - 2E_{1,2} - E_{2,1} \quad \text{et} \quad M_4 = 2(E_{1,1} - E_{2,1}) + M_1.$$

Calculer les images par φ des quatre matrices précédentes.

(9) La matrice B est-elle diagonalisable?

Partie 3 - Preuve du résultat ($\star$)

On considère donc un polynôme P de $\mathbb{R}_4[X]$ de la forme $P(X) = X^4 + dX^3 + cX^2 + b^X + a$ auquel on associe la matrice compagnon C définie ci-avant.

On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est C.

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^4$. On note $f^0 = \mathrm{Id}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{k+1} = f \circ f^k$. Enfin, on pose $g = P(f)$, c'est à dire que, pour tout $u \in \mathbb{R}^4$,

$$g(u) = f^4(u) + df^3(u) + cf^2(u) + bf(u) + au.$$

(10) Montrer que

$$f(e_1) = e_2, \quad f^2(e_1) = e_3, \quad f^3(e_1) = e_4$$

et que

$$f^4(e_1) = -(ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4).$$

(11) (a) Montrer que $g(e_1) = 0$.
(b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g \circ f^k = f^k \circ g$.
(c) En déduire que, pour tout $k \in [\![1;4]\!]$, $g(e_k) = 0$.
(d) Conclure.

Exercice 3

Partie 1 - Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction G de deux variables réelles définie sur le domaine ouvert $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

$$G(x, y) = \frac{x^2}{2y^2} - \ln x + y - \frac{3}{2}.$$

(1) Représenter graphiquement $\mathcal{D}$.
(2) Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$.
(3) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de la fonction G.
(4) Montrer que G admet un unique point critique, noté A, sur $\mathcal{D}$ dont on précisera les coordonnées.
(5) Montrer que G admet un extremum local en A dont on précisera la nature et la valeur.

Partie 2 - Une intégrale d'une fonction d'une variable

On considère maintenant la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, par:

$$f(x) = G(x, 1) = \frac{x^2}{2} - \ln x - \frac{1}{2}.$$

(6) Étudier les variations de f. Montrer que c'est une fonction convexe.
(7) Représente graphiquement l'allure de la courbe de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
(8) (a) À l'aide d'une intégration par parties, expliciter une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
(b) Montrer alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ converge et calculer sa valeur.
(c) Expliquer le résultat du programme suivant

```
function y=f(x)
    y=x^2/2-log(x)-1/2                         --> 0.6665086
endfunction
U=grand(1,10000, 'unf', 0,1)
disp(mean(feval(U, f)))
```

Partie 3 - Des sommes de Riemann et une limite

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On pose

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right).$$

(9) Le but de cette question est de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

(a) Établir, pour tout entier j vérifiant $1 \leq j \leq n-1$, les inégalités:

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{j+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{j}{n}\right).$$

(b) En déduire l'encadrement:

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\mathrm{d}x \leq S_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\mathrm{d}x.$$

(c) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

(d) Conclure.

(10) (a) À l'aide de formules du cours, expliciter, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$.

(b) En déduire la limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right).$$