ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Concours Blanc n°4

Sujet type **EDHEC**
Lundi 16 Mars 2020
Durée : 4 heures

Exercice 1

Dans cet exercice, on étudie la diagonalisation des matrices carrée d'ordre 3 antisymétriques, c'est à dire vérifiant ${}^tA = -A$.

Dans tout l'exercice, E désigne un espace vectoriel de dimension 3, dont la base canonique est notée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Partie I - Étude d'un cas particulier

On considère, dans cette partie seulement, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de E représenté par A dans la base $\mathcal{B}$ ainsi que les vecteurs u_1, u_2, u_3 définis par

$$u_1 = -2e_1 + e_2 + 2e_3, \qquad u_2 = e_1 + 2e_2 \quad \text{et} \quad u_3 = f(u_2).$$

(1) Déterminer le noyau de f et en donner une base.
(2) Montrer que $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E et déterminer la matrice B représentant f dans cette base.
(3) Montrer que, si $\lambda \neq 0$, $BX = \lambda X \iff X = 0$. En déduire des valeurs propres de A.
(4) La matrice A est-elle diagonalisable?

Partie B - Cas général

Soient a, b et c trois réels donnés. On pose alors $s = a^2 + b^2 + c^2$ et on suppose $s \neq 0$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

et g l'endomorphisme de E représenté par M dans la base $\mathcal{B}$.

(5) Calculer M^2 et M^3.
(6) Expliciter une relation simple entre M^3, M et s puis un polynôme annulateur de M.
(7) En déduire la seule valeur propre possible pour M.
(8) Montrer par l'absurde que M n'est pas inversible. En déduire le spectre de M
(9) La matrice M est-elle diagonalisable?

Exercice 2

Certains sujets abordés dans les enquêtes d'opinion sont parfois assez intimes, et on court le risque que les personnes interrogées se refusent à répondre franchement à l'enquêteur, faussant ainsi le résultat.

On peut alors avoir recours à une astuce consistant à inverser aléatoirement les réponses.

Considérons une *question confidentielle* pour laquelle on veut estimer la probabilité p de réponses positives. L'enquêteur procède alors à une expérience aléatoire (dont il ne connait pas le résultat) avant de poser la question à chaque individu.

Si **l'enquêteur ignore le résultat de l'expérience**, il ne pourra pas savoir si la réponse est franche ou non, et on peut espérer que la personne sondée acceptera de jouer le jeu.

Plus précisément, soit $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre de personnes interrogées. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit une variable de Bernoulli X_n de paramètre $\alpha \in]0;1[$ et une variable Y_n de Bernoulli définie comme suit:

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose une question (dont la réponse ne peut être que "oui" ou "non") à la $n-$ième personne;
- Si $X_n = 1$, la $n-$ième personne doit être franche, sinon la réponse est inversée.
- Si la $n-$ième personne répond "oui", alors $Y_n = 1$ et 0 sinon.

On a donc $P_{[X_n=1]}(Y_n = 1) = p$.

Le but de l'exercice est de donner une estimation de p.

(1) Montrer que
$$P(Y_n = 1) = \alpha p + (1-\alpha)(1-p).$$
(2) Sachant qu'une personne a répondu "oui", quelle est la probabilité qu'elle ait été franche?

On introduit alors la variable aléatoire T_n définie par
$$F_n = \frac{Y_1 + Y_2 + ... + Y_n}{n}.$$
(3) Montrer que F_n est un estimateur sans biais et convergent de $P(Y_n = 1)$.
(4) Pour $\alpha \neq 1/2$, exprimer p en fonction de $P(Y_n = 1)$.
(5) En déduire que
$$T_n = \frac{F_n - 1 + \alpha}{2\alpha - 1}$$
est un estimateur sans biais et convergent de p.

(6) (a) Déterminer le risque quadratique de T_n.
(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, quelle valeur attribuer à α pour que le risque quadratique de T_n soit minimal? Est-ce acceptable?

(7) Soit $\beta \in]0;1[$. Montrer que
$$I_n = \left[T_n - \frac{1}{2(2\alpha-1)\sqrt{n\beta}} ; T_n + \frac{1}{2(2\alpha-1)\sqrt{n\beta}}\right]$$
est un intervalle de confiance pour p au risque β.

Problème

On définit, pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction I par

$$I(x) = \int_0^1 \frac{e^{xt} + e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t.$$

Partie I - Résultats préliminaires

(1) À l'aide du changement de variable $u = 1 - t$, réalisé **scrupuleusement**, montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la convergence de l'intégrale

$$W_k = \int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t.$$

(2) On considère le programme suivant et son exécution

```
 function y=f(t)
    y=1/sqrt(1-t^2)
endfunction

U=grand(1, 10000, 'unf', 0, 1)
disp(mean(feval(U, f)))


--> 1.5725086
```

Comment interpréter ce résultat? Justifier.

(3) (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$W_k - W_{k+2} = \frac{1}{k+1} W_{k+2}.$$

(b) On **admet** que $W_0 = \frac{\pi}{2}$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$W_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

(4) (a) Montrer que la fonction I est bien définie sur $\mathbb{R}$ et étudier sa parité.
(b) Donner la valeur de $I(0)$.

Partie II - Une inégalité de Taylor-Lagrange

Les résultats de cette partie sont indépendants de la partie précédente mais sont utiles pour la suivante et peuvent donc, en cas de difficulté, être admis pour la Partie III.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, sur $[0; +\infty[$.

(5) Soit $x > 0$. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \mathrm{d}t,$$

où $f^{(k)}$ désigne la dérivée $k-$ième de f.

(6) En déduire l'*inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour f en x*

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} M,$$

où on a posé

$$M = \max_{t \in [0;x]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|.$$

Partie III - Une autre formule pour $I(x)$

Dans cette partie, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + e^{-x}$.

(7) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(k)}(x) = e^x + (-1)^k e^{-x}.$$

(8) Soit $u > 0$ fixé.

(a) (i) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0; u]$,

$$f^{(2n+1)}(0) \leq f^{(2n+1)}(t) \leq f^{(2n+1)}(u).$$

(ii) En déduire que

$$\max_{t \in [0;u]} \left| f^{(2n+1)}(t) \right| = \left| e^u - e^{-u} \right| = e^u - e^{-u}.$$

(b) En découpant la somme ci-dessous selon la parité de l'indice k, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} u^k = \sum_{j=0}^{n} \frac{2}{(2j)!} u^{2j}.$$

(c) En appliquant l'inégalité obtenue à la question 6 à l'ordre $2n$ la fonction f en u et à l'aide de la question précédente, montrer que

$$\left| e^u + e^{-u} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(2k)!} u^{2k} \right| \leq \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(e^u - e^{-u} \right).$$

(d) En déduire que, pour tous $x > 0$ et $t \in [0; 1]$,

$$\left| e^{xt} + e^{-xt} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2(xt)^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} e^x.$$

(9) (a) À l'aide de la question précédente, montrer que, pour tous $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{2x^{2k}}{(2k)!} W_{2k} \right| \leq \frac{x^{2n+1}\pi}{2(2n+1)!} e^x.$$

(b) En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$ et que l'on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \frac{1}{\pi} I(x).$$

Partie IV - Une application

Dans cette dernière partie, on considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes de même loi de Poisson de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

(10) Montrer que
$$P(X = Y) = e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}.$$

(11) En déduire que
$$I(2\lambda) = \pi e^{2\lambda} P(X = Y).$$

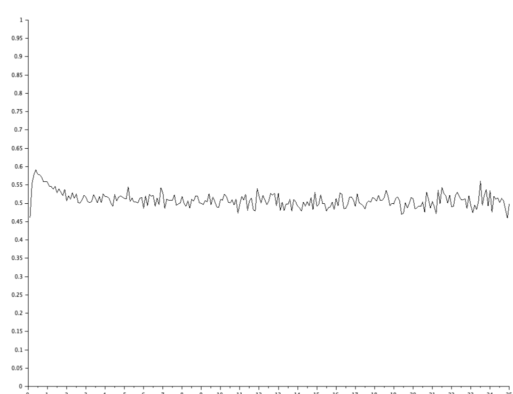
(12) **Informatique**

(a) Compléter le programme `SciLab` pour qu'il donne une estimation de $P(X = Y)$. On expliquera sur quelle idée et résultat du cours repose ce programme.

```
function p = estimation(lambda)
N = 10000
X = grand(1, N, 'poi', lambda)
Y = grand(1, N, 'poi', lambda)
n= 0
for i = 1:N
    if ..................... then
        n=........................
   end
end
p = n/N
endfunction
```

(b) On complète la fonction suivant par le script suivant qui permet d'afficher la figure ci-après.

```
L=0.1:.1:25
Y=sqrt(%pi*L).*feval(L, estimation)
plot2d(L, Y)
```



(i) Que représente cette figure?

(ii) Émettre alors une conjecture pour un équivalent de $P(X = Y)$ lorsque $\lambda \to +\infty$.

(iii) En déduire une autre conjecture pour un équivalent de $I(x)$ lorsque $x \to +\infty$.