ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Concours Blanc n°4

Sujet type **EDHEC**

Solution

Exercice 1

Cet exercice est construit sur une annale d'**ECRICOME 1998**.

Dans cet exercice, on étudie la diagonalisation des matrices carrée d'ordre 3 antisymétriques, c'est à dire vérifiant ${}^tA = -A$.

Dans tout l'exercice, E désigne un espace vectoriel de dimension 3, dont la base canonique est notée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Partie I - Étude d'un cas particulier

On considère, dans cette partie seulement, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de E représenté par A dans la base $\mathcal{B}$ ainsi que les vecteurs u_1, u_2, u_3 définis par

$$u_1 = -2e_1 + e_2 + 2e_3, \qquad u_2 = e_1 + 2e_2 \quad \text{et} \quad u_3 = f(u_2).$$

(1) On résout

$$\begin{aligned} u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f) &\iff Au = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2y - z &=& 0 \\ -2x - 2z &=& 0 \\ x + 2y &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff x = -z = -2y \end{aligned}$$

Il suit que

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}(u_1)$$

Ainsi, u_1 étant non nul, (u_1) forme une base du noyau de f.

(2) Commençons par déterminer les coordonnées de ces vecteurs dans la base canonique. Ensuite, la famille étant composée de trois vecteurs de E (de dimension 3), il suffit de montrer que la famille est libre pour qu'elle forme une base de E. On a

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = f(u_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0 \quad &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2\alpha + \beta + 4\gamma &=& 0 \\ \alpha + 2\beta - 2\gamma &=& 0 \\ 2\alpha + 5\gamma &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2\alpha + \beta + 4\gamma &=& 0 \\ 5\beta &=& 0 \\ \beta + 9\gamma &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{aligned}$$

et la famille est bien libre et forme donc une base de E.

Pour déterminer la matrice de f dans cette base, on exprime les images par f des vecteurs de cette base. On sait déjà que $f(u_1) = 0$ et $f(u_2) = u_3$. Pour le dernier on calcule, *via* les cordonnées dans la base canonique

$$f(u_3) = A \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -18 \\ 0 \end{pmatrix} = -9u_2.$$

Il suit que

$$B = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Soit $\lambda \neq 0$. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} BX = -\lambda X \quad &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -\lambda x &=& 0 \\ -\lambda y - 9z &=& 0 \\ y - \lambda z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y - \lambda z &=& 0 \\ (-9 - \lambda^2)z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff x = y = z = 0 \end{aligned}$$

car $-9 - \lambda^2 \neq 0$. Ainsi, tout réel non nul ne peut pas être valeur propre de B. Comme B est clairement non inversible (première colonne nulle), 0 est la seule valeur propre de B. Comme A et B sont semblables,

$$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B) = \{0\}.$$

(4) La matrice A n'admet qu'une seule valeur propre, de plus le sous-espace associé (qui est le noyau de f) est de dimension 1. Or, $\dim(E) = 3$ donc A n'est pas diagonalisable.

Partie B - Cas général

Soient a, b et c trois réels donnés. On pose alors $s = a^2 + b^2 + c^2$ et on suppose $s \neq 0$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

et g l'endomorphisme de E représenté par M dans la base $\mathcal{B}$.

(5) On calcule

$$M^2 = \begin{pmatrix} -(a^2+b^2) & -bc & ac \\ -bc & -(a^2+c^2) & -ab \\ ac & -ab & -(b^2+c^2) \end{pmatrix},$$

et

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & a(a^2+b^2+c^2) & b(a^2+b^2+c^2) \\ -a(a^2+b^2+c^2) & 0 & c(a^2+b^2=c^2) \\ -b(a^2+b^2+c^2) & -c(a^2+b^2+c^2) & 0 \end{pmatrix} = -sM.$$

(6) On a clairement $M^3 = -sM$, et donc le polynôme $X^3 + sX = X(X^2 + s)$ annule M.

(7) Comme $s > 0$ (car a, b, c ne sont pas tous nuls), le polynôme précédent ne s'annule qu'en 0. Ainsi, la seule valeur propre possible pour M est 0.

(8) Supposons que M soit inversible, il existe donc une matrice inverse M^{-1}. En multipliant la relation $M^3 = -sM$ par M^{-1}, on obtient $M^2 = -sI$, ce qui n'est possible que si $a = b = c = 0$, ce qui n'est pas le cas. Ainsi, M n'est pas inversible.

(9) La matrice M n'est pas inversible, donc 0 est valeur propre et c'est la seule, ainsi

$$\mathrm{Sp}(M) = \{0\}.$$

Si M était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale avec des zéros sur la diagonale (sa seule valeur propre), c'est à dire que M serait nulle (car seule la matrice nulle est semblable à une matrice nulle). Or, ce n'est pas le cas. Donc M n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre de personnes interrogées. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit une variable de Bernoulli X_n de paramètre $\alpha \in]0;1[$ et une variable Y_n de Bernoulli définie comme suit:

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose une question (dont la réponse ne peut être que "oui" ou "non") à la $n-$ième personne;
- Si $X_n = 1$, la $n-$ième personne doit être franche, sinon la réponse est inversée.
- Si la $n-$ième personne répond "oui", alors $Y_n = 1$ et 0 sinon.

(1) Si $X_n = 1$, la réponse est franche et sinon, elle est inversée. Ce qui s'interprète comme

$$P_{[X_n=1]}(Y_n = 1) = p, \quad P_{[X_n=0]}(Y_n = 1) = 1 - p.$$

Ainsi, d'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{(X_n = 0), (X_n = 1)\}$, on a

$$\begin{aligned} P(Y_n = 1) &= P_{[X_n=0]}(Y_n = 1)P(X_n = 0) + P_{[X_n=1]}(Y_n = 1)P(X_n = 1) \\ &= (1-p)(1-\alpha) + p\alpha. \end{aligned}$$

(2) On cherche ici $P_{[Y_n=1]}(X_n = 1)$.

Il s'agit d'inverser le conditionnement, ce qui se fait avec la *formule de Bayes* (qu'on avait pas vue depuis un certain temps et qu'il est donc intéressant de revoir)

$$P_{[Y_n=1]}(X_n = 1) = \frac{P_{[X_n=1]}(Y_n = 1)P(X_n = 1)}{P_{[X_n=1]}(Y_n = 1)P(X_n = 1) + P_{[X_n=0]}(Y_n = 1)P(X_n = 0)} = \frac{\alpha p}{(1-p)(1-\alpha) + p\alpha}$$

On introduit alors la variable aléatoire T_n définie par

$$F_n = \frac{Y_1 + Y_2 + ... + Y_n}{n}.$$

(3) Par linéarité de l'espérance, on sait que la *moyenne empirique* d'un $n-$échantillon est un estimateur sans biais de l'espérance de la variable *échantillonnée*. Ainsi,

$$E(F_n) = E(Y_1) = P(Y_1 = 1) = P(Y_n = 1).$$

Pour montrer que c'est un estimateur convergent, on peut utiliser une conséquence de l'inégalité de Bienayme-Tchebychev qui dit qu'il suffit de montrer que le risque quadratique de F_n (ici égal à sa variance) tend vers 0. En observant que, Y_i étant une loi de Bernoulli, on a $V(Y_i) \leq 1/4$, on obtient

$$\begin{aligned} r(F_n) &= V(F_n) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(Y_i) \qquad \text{(par indépendance des } Y_i\text{)} \\ &= \frac{V(Y_1)}{n} \leq \frac{1}{4n} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

et F_n est bien un estimateur convergent de $P(Y_1 = 1)$.

(4) On développe l'expression obtenue ci-avant.

$$\begin{aligned} P(Y_n = 1) = (1-p)(1-\alpha) + \alpha p &\iff P(Y_n = 1) = (2\alpha - 1)p + (1-\alpha) \\ &\iff p = \frac{P(Y_n = 1) - (1-\alpha)}{2\alpha - 1}. \end{aligned}$$

(5) Par linéarité de l'espérance, en posant

$$T_n = \frac{F_n - 1 + \alpha}{2\alpha - 1},$$

on a bien

$$E(T_n) = E\left(\frac{F_n - 1 + \alpha}{2\alpha - 1}\right) = \frac{E(F_n) - (1-\alpha)}{2\alpha - 1} = \frac{P(Y_n = 1) - (1-\alpha)}{2\alpha - 1} = p.$$

(6) (a) On a, comme précédemment

$$\begin{aligned} r(T_n) &= V(T_n) = \frac{V(F_n)}{(2\alpha - 1)^2} \\ &= \frac{V(Y_1)}{(2\alpha - 1)^2 n} \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(P(Y_1 = 1))$ et que $P(Y_1 = 1) = (2\alpha - 1)p + (1-\alpha)$, un calcul (un peu fastidieux) donne

$$V(Y_1) = (2\alpha - 1)^2 p(1-p) + \alpha(1-\alpha)$$

ce qui permet finalement d'obtenir

$$r(T_n) = \frac{p(1-p)}{n} + \frac{\alpha(1-\alpha)}{(2\alpha - 1)^2 n}.$$

(b) D'après la question précédente, le risque quadratique de T_n est minimal lorsque $\dfrac{\alpha(1-\alpha)}{(2\alpha-1)^2}$ est minimal. On étudie alors la fonction

$$\varphi : \alpha \mapsto \frac{\alpha(1-\alpha)}{(2\alpha-1)^2}.$$

Le calcul donne alors

$$\varphi'(\alpha) = \frac{-1}{(2\alpha-1)^3}$$

et les variations de φ sont données par le tableau suivant

α	0		$1/2$		1
$\varphi'(\alpha)$		$-$	||	$+$	
φ	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

Le risque sera donc minimal pour un choix de $\alpha = 0$ ou 1, ce qui annule complètement l'intérêt du procédé.

(7) Soit $\beta \in]0;1[$. D'après Bienaymé-Tchebychev,

$$\begin{aligned}
P(p \notin I_n) &= P\left(|T_n - p| > \frac{1}{2(2\alpha-1)\sqrt{n\beta}}\right) \\
&= P\left(|T_n - E(T_n)| > \frac{1}{2(2\alpha-1)\sqrt{n\beta}}\right) \\
&\leq V(T_n)\left(2(2\alpha-1)\sqrt{n\beta}\right)^2 \\
&= \frac{V(Y_1)}{n(2\alpha-1)^2} 4(2\alpha-1)^2 n\beta \\
&= 4V(Y_1)\beta \\
&\leq \beta
\end{aligned}$$

car $V(Y_1) \leq 1/4$. Et I_n est bien un intervalle de confiance au risque β pour p.

Problème

Ce problème est inspiré du sujet **EML 2018**, série S.

On définit, pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction I par

$$I(x) = \int_0^1 \frac{e^{xt} + e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t.$$

Partie I - Résultats préliminaires

(1) L'intégrale définissant W_k est impropre en 0. Soit donc $\varepsilon \in]0;1[$. On remarque que
$$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{(1-t)(1+t)}.$$
Ainsi, e changement de variable affine (donc licite) $u = 1-t$ donne $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$ et en permutant les bornes, on obtient
$$\int_0^\varepsilon \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_{1-\varepsilon}^1 \frac{(1-u)^k}{\sqrt{u(2-u)}}\mathrm{d}u.$$
Comme $1-\varepsilon \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 1$, la convergence de notre intégrale se ramène à la convergence de
$$\int_0^1 \frac{(1-u)^k}{\sqrt{u(2-u)}}\mathrm{d}u.$$
Mais,
$$\frac{(1-u)^k}{\sqrt{u(2-u)}} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{u}}.$$
Mais, par le critère de Riemann, $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}$ converge, et le critère d'équivalence permet alors d'affirmer que l'intégrale qui définit W_k est bien convergente.

(2) Le programme donné calcule la moyenne (avec la commande `mean()`) de l'image par la fonction $g : t \mapsto 1/(\sqrt{1-t^2})$ d'un $n-$échantillon de la loi uniforme $\mathcal{U}([0;1])$. La loi faible des grands nombres assure que la moyenne empirique est un estimateur convergent de l'espérance. Or, par le théorème de transfert, cette espérance est égale à
$$\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = W_0.$$
C'est le principe de la *Méthode de Monte-Carlo*. On peut donc conclure que
$$W_0 \simeq 1.5725086.$$

(3) (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. On procède par intégration par parties, que l'on réalise sur $[0;\varepsilon]$. Remarquant que
$$\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t^{k+2}}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{t^k(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}} = t^k\sqrt{1-t^2},$$
on pose
$$\left\{\begin{array}{rcl} u' & = & t^k \\ v & = & \sqrt{1-t^2}\end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcl} u & = & \dfrac{t^{k+1}}{k+1} \\ v' & = & -\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\end{array}\right.$$
u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\varepsilon]$, rendant l'IPP licite. On obtient alors,
$$\begin{aligned}\int_0^\varepsilon t^k\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{k+1}\sqrt{1-t^2}}{k+1}\right]_0^\varepsilon + \frac{1}{k+1}\int_0^\varepsilon \frac{t^{k+2}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\varepsilon^{k+1}\sqrt{1-\varepsilon^2}}{k+1} + \frac{1}{k+1}\int_0^\varepsilon \frac{t^{k+2}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\ &\underset{\varepsilon\to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{k+1}\int_0^1 \frac{t^{k+2}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\end{aligned}$$
car W_k est convergente pour tout k. On a bien
$$W_k - W_{k+2} = \frac{1}{k+1}W_{k+2}.$$

(b) On **admet** que $W_0 = \frac{\pi}{2}$. On procède alors par récurrence.

- <u>initialisation.</u> Pour $k = 0$, on a admis que $W_0 = \pi/2$ et la formule est donc vraie.

- <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}$, on ait

$$W_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \times \frac{\pi}{2} \qquad \text{(HR)}$$

Montrons alors que

$$W_{2(k+1)} = \frac{(2k+2)!}{2^{2k+2}((k+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

Commençons par voir que l'IPP précédente se reformule comme

$$W_n - W_{n+2} = \frac{1}{n+1} W_{n+2} \Longleftrightarrow W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

En prenant $n = 2k$, on a

$$\begin{aligned} W_{2k+2} &= \frac{2k+1}{2k+2} W_{2k} \\ &= \frac{2k+1}{2k+2} \times \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \times \frac{\pi}{2} \qquad \text{(par HR)} \\ &= \frac{(2k+2)(2k+1)}{(2k+2)^2} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2k+2)!}{2^2(k+1)^2 2^{2k}(k!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2k+2)!}{2^{2k+2}((k+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence.

(4) (a) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $t \mapsto \frac{e^{tx}+e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0;1[$. Ainsi, l"intégrale qui définit $I(x)$ est impropre en 1, mais

$$\frac{e^{tx}+e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \sim \frac{2}{\sqrt{1-t^2}}$$

et comme W_0 est convergente, il suit que l'intégrale qui définit $I(x)$ et convergente ce qui justifie bien de la forme définition de I. Par ailleurs

$$I(-x) = \int_0^1 \frac{e^{-tx}+e^{-t(-x)}}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t = \frac{e^{-tx}+e^{tx}}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t = I(x)$$

et la fonction I est paire.

(b) D'après ce qui précède

$$I(0) = \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t = 2W_0 = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Partie II - Une inégalité de Taylor-Lagrange

Les résultats de cette partie sont indépendants de la partie précédente mais sont utiles pour la suivante et peuvent donc, en cas de difficulté, être admis pour la Partie III.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, sur $[0;+\infty[$.

(5) Il s'agit de faire une IPP sur le *reste* intégral de la formule. Mais rédigeons la récurrence.

- <u>initialisation.</u> Pour $n = 0$, si f est de classe $\mathcal{C}^1$, on a bien

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = f(0) + [f(t)]_0^x = f(x),$$

et la formule est vérifiée.

- <u>hérédité.</u> Supposons que, si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on puisse écrire

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \mathrm{d}t.$$

Si maintenant f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$, elle est en particulier de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et la formule précédente reste vraie. Appliquons une intégration par parties à l'intégrale du terme de droite de l'hypothèse de récurrence.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u' & = & \frac{(x-t)^n}{n!} \\ v & = & f^{(n+1)} \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{lcl} u & = & \dfrac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \\ v' & = & f^{(n+2)} \end{array} \right.$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$, les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;x]$ rendant l'IPP licite, et on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \mathrm{d}t &= \left[-\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x + \int_0^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!} (x-t)^n \mathrm{d}t \\ &= \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} x^{n+1} + \int_0^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!} (x-t)^n \mathrm{d}t \end{aligned}$$

En insérant $\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} x^{n+1}$ dans la somme, on a bien

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!} (x-t)^{n+1} \mathrm{d}t,$$

ce qui est la formule au rang $(n+1)$ et termine la récurrence.

(6) Comme f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, $f^{(n+1)}$ est continue et admet un maximum sur $[0;x]$, que l'on note M. Il suit que

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| &= \left| \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_0^x \left| \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \right| \mathrm{d}t \qquad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leq \frac{M}{n!} \int_0^x (x-t)^n \mathrm{d}t \qquad \text{(positivité de l'intégrale)} \\ &\leq \frac{M}{n!} \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = \frac{M x^{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

ce qui est bien l'inégalité attendue.

Partie III - Une autre formule pour $I(x)$

Dans cette partie, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + e^{-x}$.

(7) La fonction exponentielle étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, il en est de même pour f. On procède par récurrence pour le calcul des dérivées successives.

- initialisation. Pour $k = 0$, $f^{(0)}(x) = f(x) = e^x + e^{-x} = e^x + (-1)^0 e^{-x}$ et la relation est vraie.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}$, on ait $f^{(k)}(x) = e^x + (-1)^k e^{-x}$. Alors,
$$f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}\right)'(x) = \left(e^x + (-1)^k e^{-x}\right)' = e^x + (-1)^{k+1} e^{-x},$$
et c'est fini.

(8) Soit $u > 0$ fixé.

(a) (i) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0; u]$. Comme
$$f^{(2n+2)}(t) = e^t + (-1)^{2n+2} e^{-t} = e^t + e^{-t} > 0,$$
la fonction $f^{(2n+1)}$ est croissante sur $[0, u]$ et on a bien
$$f^{(2n+1)}(0) \leq f^{(2n+1)}(t) \leq f^{(2n+1)}(u).$$

(ii) En particulier,
$$0 \leq f^{(2n+1)}(t) \leq e^u - e^{-u}$$
donc
$$\left|^{(2n+1)}(t)\right| \leq e^u - e^{-u}.$$
Ce majorant étant atteint (en $t = u$), il s'agit bien du maximum.

(b) Commençons par observer que, d'après les calculs de dérivées successives opérés ci-avant,
$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 2, & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0, & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$
Il suit que
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} u^k &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} u^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} u^k \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{2}{k!} u^k \underset{k=2j}{=} \sum_{j=0}^{n} \frac{2}{(2j)!} u^{2j} \end{aligned}$$

(c) D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ la fonction f en u, on a
$$\begin{aligned} \left| e^u + e^{-u} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(2k)!} u^{2k} \right| &= \left| e^u + e^{-u} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} u^k \right| \\ &\leq \frac{\max_{t \in [0;u]} \left| f^{(2n+1)}(t) \right| u^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(e^u - e^{-u}\right), \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(d) Soient $x > 0$ et $t \in [0;1]$. En appliquant le résultat de la question précédente avec $u = xt$, on a

$$\left| e^{xt} + e^{-xt} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2(xt)^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{x^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(e^{tx} - e^{-xt} \right).$$

Mais,

$$t^{2n+1} \leq 1 \quad \text{et} \quad e^{tx} - e^{-xt} \leq e^{tx} \leq e^{x}$$

car $tx \leq x$ et car la fonction exp est croissante. On a bien

$$\left| e^{xt} + e^{-xt} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2(xt)^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{x}$$

comme désiré.

(9) (a) Il "suffit" d'intégrer la relation précédente, après avoir tout divisé par $\sqrt{1-t^2}$. En effet, on a tout d'abord

$$\left| \frac{e^{xt} + e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2x^{2k}}{(2k)!} \frac{t^{2k}}{\sqrt{1-t^2}} \right| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{e^{x}}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Les intégrales $I(x)$, W_0 et W_{2k} étant convergentes, on a par linéarité et positivité de l'intégrale

$$\left| \int_0^1 \frac{e^{xt} + e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n} \frac{2x^{2k}}{(2k)!} \int_0^1 \frac{t^{2k}}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t \right| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^1 \frac{e^{x}}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t.$$

ou encore, sachant que $W_0 = \pi/2$,

$$\left| I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{2x^{2k}}{(2k)!} W_{2k} \right| \leq \frac{x^{2n+1}\pi}{2(2n+1)!} e^{x}.$$

(b) Comme on sait que $W_{2k} = \frac{(2k)!\pi}{2^{2k+1}(k!)^2}$, on a

$$\left| I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \pi \right| \leq \frac{x^{2n+1}\pi}{2(2n+1)!} e^{x}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$$

(on a reconnu le terme général d'une série - la série exponentielle - convergente, donc qui tend nécessairement vers 0). Par le théorème des gendarmes, on en conclut que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \frac{1}{\pi} I(x).$$

Partie IV - Une application

Dans cette dernière partie, on considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes de même loi de Poisson de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

(10) C'est une question ultra-classique. D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(X=Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=Y\cap X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=k\cap X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=k)P(X=k) \qquad \text{(par indépendance)} \\ &= e^{-2\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}. \end{aligned}$$

(11) En appliquant (9b) avec $x=2\lambda$, on obtient

$$I(2\lambda)=\pi\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}=\pi e^{2\lambda}P(X=Y).$$

(12) **Informatique**

(a) On complète le programme comme suit

```
function p = estimation(lambda)
N = 10000
X = grand(1, N, 'poi', lambda)
Y = grand(1, N, 'poi', lambda)
n= 0
for i = 1:N
    if X(i)==Y(i) then
        n=n+1
   end
end
p = n/N
endfunction
```

Ce programme permet de calculer la *fréquence* des égalités $X_k = Y_k$ où $(X_1,..,X_n)$ et $(Y_1,...,Y_n)$ sont deux $n-$échantillons de $\mathcal{P}(\lambda)$ ce qui donne une estimation de $P(X=Y)$. En effet, introduisant une variable Z_k définie par

$$Z_k=\begin{cases}1, & \text{si } X_k=Y_k\\ 0, & \text{sinon}\end{cases}$$

qui est une variable de Bernoulli de paramètre $P(X=Y)$, la fonction précédente renvoie la moyenne empirique de l'échantillon$(Z_1,...,Z_n)$ qui est bien une estimation (sans bien et convergente) du paramètre de Z_k et donc de $P(X=Y)$.

(b) (i) La figure représente la fonction

$$\lambda\longmapsto\sqrt{\pi\lambda}P(X=Y)$$

sur l'intervalle $]0;25]$ (où X et Y lois de Poisson indépendantes de paramètre λ).

(ii) Par lecture graphique, on peut conjecturer que

$$P(X=Y)\sim\frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}},\quad \lambda\to+\infty.$$

(iii) Comme $I(2\lambda) = \pi e^{2\lambda} P(X = Y)$, prenant $\lambda = x/2$, on peut conjecturer que

$$I(x) \sim \frac{\sqrt{\pi} e^x}{\sqrt{2x}}, \ x \to +\infty.$$