Concours Blanc n°5

Sujet type **ESSEC II**
Vendredi 5 Juin
Durée : 4 heures

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Introduction

On s'intéresse dans ce problème à la détermination de lois de probabilité composées qui interviennent en particulier dans la gestion du risque en assurance et en théorie de la ruine. On étudie le modèle suivant.

- Le nombre de sinistres à prendre en charge par une compagnie d'assurances sur une période donnée est une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$.
- Les coûts des sinistres successifs sont modélisés par une suite de variables aléatoires $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. On suppose que les variables U_k sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et identiquement distribuées (c'est-à-dire suivant la même loi), et sont indépendantes de N.
- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$ et X_0 est la variable certaine de valeur 0.
X_n, qui s'exprime comme somme des U_k est donc également indépendante de N.
- La charge sinistrale totale pour la compagnie d'assurance sur une période est donnée par la variable aléatoire X définie par:
$$X = \sum_{k=1}^{N} U_k$$
et l'on précise que $X = X_0 = 0$ si N prend la valeur 0. **On dit que X suit une loi composée.**
- Pour tout entier naturel j, on pose : $p_j = P(N = j)$, $q_j = P(U_1 = j)$ et $r_j = P(X = j)$.

Partie I – Des exemples

Dans cette partie I, on suppose que les variables U_k suivent la loi de Bernoulli de paramètre p, où p est un réel de l'intervalle $]0; 1[$.

(1) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, quelle est la loi de X_n?

(2) Pour tout entier naturel j, établir
$$r_j = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_n = j)p_n.$$

(3) Dans cette question, on suppose que N suit la loi binomiale de paramètres m, entier naturel, et π, réel dans $]0; 1[$. Soit j un entier naturel.
   (a) Justifier que $r_j = 0$ si $j > m$.

(b) Établir que, si $j \in [\![0;m]\!]$,

$$r_j = \sum_{n=j}^{m} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n}.$$

(c) Vérifier que, pour tous entiers j, n, m tels que $0 \leq j \leq n \leq m$,

$$\binom{n}{j}\binom{m}{n} = \binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j}.$$

(d) En déduire, pour tout $j \in [\![0;m]\!]$,

$$r_j = \binom{m}{j} (p\pi)^j \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} [(1-p)\pi]^\ell (1-\pi)^{m-j-\ell}.$$

(e) Montrer finalement que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres en fonction de m, p et π.

(4) On suppose dans cette question **4** que N suit la loi de Poisson de paramètre λ, réel strictement positif.

(a) Montrer que pour tout entier naturel j, on a:

$$r_j = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} [\lambda(1-p)]^{n-j}$$

(b) En déduire que X suit une loi de Poisson, et préciser son paramètre en fonction de p et λ.

Partie II – La loi binomiale négative

On généralise la définition des coefficients binomiaux aux nombres réels en posant, pour tout y réel et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\binom{y}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (y-i), \quad \text{et} \quad \binom{y}{0} = 1.$$

(5) Écrire une fonction `SciLab` d'entête `function CB = Coeff_Binom(y,k)` qui calcule $\binom{y}{k}$.

(6) *La formule du binôme négatif.* Soit c un réel strictement positif, et x un réel de $[0;1[$.

(a) Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}} \mathrm{d}t.$$

Montrer que pour tout entier naturel n, on a

$$I_n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{c+n+1}{n+1} I_{n+1},$$

puis montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k + c\binom{c+n}{n} I_n.$$

(b) Vérifier que pour tout $t \in [0;x]$,

$$0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x.$$

En déduire l'encadrement

$$0 \leq I_n \leq \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}.$$

(c) (i) Montrer, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,

$$\binom{c+n}{n} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{c}{k}\right).$$

(ii) Montrer que pour tout réel t positif, $\ln(1+t) \leq t$.

(iii) Établir, pour tout entier naturel $k \geq 2$,

$$\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1).$$

En déduire que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n).$$

(iv) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$

$$\ln\left[\binom{c+n}{n}\right] \leq c(1+\ln(n)).$$

En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty}\binom{c+n}{n}x^{n+1} = 0.$$

(d) En conclure que la série $\sum_{k\geq 0}\binom{c+k-1}{k}x^k$ est convergente, et établir la formule du binôme négatif:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{c+k-1}{k}x^k = \frac{1}{(1-x)^c}.$$

(7) Soit p un réel de $]0;1[$ et r un réel strictement positif. Montrer que la suite de nombres $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$p_k = \binom{r+k-1}{k}(1-p)^k p^r$$

définit une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On l'appelle *loi binomiale négative* de paramètres r et p.

(8) Si Y est une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres 1 et p, reconnaître la loi de $Y+1$.

(9) *Espérance et variance.* Soit Z une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres r réel strictement positif et $p \in]0;1[$.

(a) Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$,

$$k\binom{r+k-1}{k} = r\binom{r+k-1}{k-1}.$$

(b) Montrer que Z admet une espérance et que l'on a

$$E(Z) = \frac{r(1-p)}{p}.$$

(c) Montrer que Z admet une variance et que l'on a

$$V(Z) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

On pourra commencer par calculer l'espérance de $Z(Z-1)$.

Partie III – Les lois de Panjer

On reprend les notations du début du problème: la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ a sa loi donnée par $p_k = P(N = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

On suppose dans toute la suite du sujet que la loi de N vérifie la *relation de Panjer*: il existe deux réels a et b, avec $a < 1$ et $a + b > 0$, tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}.$$

On dira alors que N suit la loi $\mathcal{P}(a, b)$.

(10) *Détermination des lois de Panjer.*

(a) Montrer que pour tout entier k strictement positif, on a

$$p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right).$$

(b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$. Montrer que N suit une loi de Poisson de paramètre b.

(c) Dans cette question, on suppose que $a < 0$.

(i) Montrer qu'il existe un unique entier naturel r, tel que:

$$\forall k > r,\ p_k = 0, \qquad \text{et} \qquad \forall k \leq r,\ p_k \neq 0.$$

On pourra raisonner par l'absurde, et supposer les p_k tous strictement positifs.

(ii) Montrer: $b = -a(r + 1)$.

(iii) Établir que pour tout $k \in [\![0; r]\!]$,

$$p_k = (-a)^k \binom{r}{k} p_0.$$

En déduire que $p_0 = \frac{1}{(1-a)^r}$.

(iv) En conclure que N suit une loi binomiale et préciser les paramètres en fonction de a et b.

(d) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

(i) Montrer que pour tout entier naturel k, on a: $p_k = \binom{\frac{b}{a}+k}{k} a^k p_0$.

(ii) En déduire que N suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de a et b.

(11) Montrer que, dans tous les cas, N admet une espérance et une variance, et qu'elles sont données par

$$E(N) = \frac{a + b}{1 - a} \qquad \text{et} \qquad V(N) = \frac{a + b}{(1 - a)^2}.$$

Partie IV – L'algorithme de Panjer

- On reprend les notations de l'introduction du sujet et de la partie III.
- Si A est un événement et Y une variable aléatoire, on note, si elle existe, $E_A(Y)$ l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant A.

(12) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $P(X_n = 0)$ en fonction de q_0 puis établir que

$$r_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} {q_0}^n p_n.$$

(13) Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, que vaut $E_{(X_n=j)}(X_n)$? En déduire que

$$E_{(X_n=j)}(U_1) = \frac{j}{n}.$$

(b) Établir que

$$r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_n = j)\left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} E_{(X_n=j)}\left(a + \frac{b}{j}U_1\right) P(X_n = j)p_{n-1}.$$

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$E_{(X_n=j)}\left(a + \frac{b}{j}U_1\right) P(X_n = j) = \sum_{i=0}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right) P(U_1 = i)P(X_{n-1} = j - i).$$

(d) En conclure que

$$r_j = \sum_{i=0}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i r_{j-i},$$

puis que

$$r_j = \frac{1}{1 - aq_0}\left(\sum_{i=1}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i r_{j-i}\right).$$

Cette formule permet de calculer récursivement les nombres r_j et ainsi de déterminer la loi de X.

(14) *Des exemples d'application.*

(a) Dans cette question, les variables U_i suivent la loi de Bernoulli de paramètre p.

(i) Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$r_j = \frac{p}{1 - a + ap}\left(a + \frac{b}{j}\right) r_{j-1}.$$

En déduire que X suit une loi de Panjer.

(ii) Retrouver les résultats des questions **3** et **4** de la partie I.

(b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$, rappelons que cela entraîne que N suit la loi de Poisson de paramètre b. Soit p un réel de l'intervalle $]0; 1[$.

(i) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que la famille de nombres $(q_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$q_i = \alpha\frac{p^i}{i}$$

définisse une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ (*loi logarithmique discrète*).

On pose $q_0 = 0$.

On suppose que les variables U_k suivent cette loi de probabilité.

(ii) Montrer que pour tout entier $j \geq 1$, on a

$$r_j = \frac{b\alpha}{j}\sum_{i=1}^{j} p^i r_{j-i}.$$

(iii) En utilisant un changement d'indice, établir que pour tout $j \geq 2$,

$$r_j = \left(p + \frac{p(b\alpha - 1)}{j}\right) r_{j-1},$$

puis montrer que cette égalité est encore vérifiée pour $j = 1$.

(iv) Conclure que X suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de b, α et p.