ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Concours Blanc n°5

Sujet type **EML**/**Ecricome**
Mercredi 3 Juin
Durée : 4 heures

Exercice 1

Dans cet exercice, on note ${}^tM$ la transposée de la matrice M et on rappelle la formule

$$ {}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM. $$

Partie I

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 3 et on considère l'ensemble $\mathcal{F}$ défini par :

$$ \mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & 0 & 2\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{pmatrix},\ (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \right\}. $$

(1) Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et en donner une base ainsi que sa dimension.

(2) Soit $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & 0 & 2\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{F}$. Montrer que

$$ P \text{ est inversible } \iff (\alpha \neq 0 \text{ et } \beta \neq 0 \text{ et } \gamma \neq 0)\,. $$

Partie II

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et on note $(P_0, P_1, P_2) = (1, X, X^2)$ sa base canonique. On définit alors l'application φ de $\mathbb{R}_2[X]$ suivante.

$$ \begin{array}{rccl} \varphi \ : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P(X) & \longmapsto & (1+X)P(X) + (1+X)P'(X) - \dfrac{1}{2}X(1+X)^2P''(X) \end{array} $$

(3) Montrer que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$.
On admet que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

(4) Calculer les images des polynômes P_0, P_1 et P_2 par φ puis en déduire que la matrice de φ dans la base (P_0, P_1, P_2) est la matrice

$$ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. $$

(5) (a) Justifier que A est diagonalisable.

(b) Vérifier que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1, 3\}$ et déterminer les sous espaces propres associés à chacune de ces valeurs propres.

(c) En déduire une matrice inversible Q de première ligne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et une matrice diagonale D dont les éléments diagonaux sont rangés par ordre croissants telles que : $A = Q\,D\,Q^{-1}$.

On considère $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & 0 & 2\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{F}$ avec $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ et $\gamma \neq 0$.

On cherche maintenant à montrer qu'on peut trouver des valeurs de α, β et γ pour lesquelles :

$$A = PD\,{}^tP \quad \text{où } {}^tP \text{ désigne la matrice transposée de la matrice } P.$$

(6) (a) En considérant le résultat de la question 5b, justifier que la matrice P vérifie la relation $A = PDP^{-1}$.

(b) Calculer le produit $P\,{}^tP$ en fonction de α, β et γ.

(c) En déduire l'existence de valeurs de α, β et γ telles que ${}^tP = P^{-1}$.

(d) Conclure qu'il existe un matrice P de $\mathcal{F}$ telle que $A = P\,D\,{}^tP$.

Partie III

On pose pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$.
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y) = g(x, y, y^2).$$

(7) Expliciter $f(x, y)$ et justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

(8) Montrer que f admet exactement trois points critiques

$$R = (0, 0), \quad S = (1, -1), \quad \text{et} \quad T = (1/2, -1/2).$$

(9) Former la matrice hessienne de f en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$.

(10) On suppose que les matrices hessiennes de f aux points R, S et T sont stockées respectivement dans les variables `SciLab` notées `HR`, `HS` et `HT` et on considère les instructions suivantes.

```
--> [P,D] = spec(HR)  // éléments propres de la matrice HR
 D  =                              P  =
       0.763932   0.                      -0.8506508   0.5257311
       0.         5.236068                 0.5257311   0.8506508

--> [P,D] = spec(HS)  // éléments propres de la matrice HS
 D  =                              P  =
       0.763932   0.                      -0.8506508   0.5257311
       0.         5.236068                 0.5257311   0.8506508

--> [P,D] = spec(HT)  // éléments propres de la matrice HT
 D  =                              P  =
      -0.5615528   0.                      0.6154122  -0.7882054
        0.         3.5615528              -0.7882054  -0.6154122
```

Déduire de ces résultats la nature des points critiques R, S et T.

(11) On souhaite montrer dans cette question que f admet un extremum global aux points R et S. Pour cela, on reprend la matrice A introduite dans la partie II et on considère la matrice colonne

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{ainsi que sa transposée} \quad {}^tX = (x, y, z).$$

(a) Vérifier que : ${}^tXAX = g(x, y, z)$.
(b) Montrer, sans calculs explicites, que la transposée de la matrice $({}^tPX)$ est $({}^tXP)$.
(c) En déduire, en utilisant la question 6d, que : $g(x, y, z) = {}^tX'DX'$ où on a posée $X' = {}^tPX = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.
(d) Vérifier alors que $g(x, y, z) = y'^2 + 3z'^2$ puis conclure quand à la nature des extrema aux points R et S.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, on considère un réel $a \in \mathbb{R}_+^*$.

(1) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n \exp\left(-\tfrac{x^2}{2a^2}\right) \mathrm{d}x$$

est convergente.

(2) (a) Donner une densité d'une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance nulle et de variance a^2. En déduire que

$$I_0 = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(b) À l'aide du changement de variable $u = x^2/2$, montrer que $I_1 = a^2$.

(3) (a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout $t \in [0; +\infty[$:

$$\int_0^t x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \mathrm{d}x = -a^2 t^{n-1} \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right) + (n-1)\, a^2 \int_0^t x^{n-2} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \mathrm{d}x.$$

(b) En déduire, pour tout entier $n \geq 2$ la relation

$$I_n = (n-1)\, a^2 I_{n-2}.$$

(c) Calculer I_2 et I_3.

On considère l'application $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$g_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x}{a^2} \exp\left(-\tfrac{x^2}{2a^2}\right), & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(4) Montrer que g_a est une densité de probabilité.

On considère une variable aléatoire X admettant g_a comme densité.

(5) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

(6) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $E(X) = a\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

(7) Montrer que la variable aléatoire X admet une variance et que $V(X) = \dfrac{4-\pi}{2} a^2$.

(8) (a) On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur l'intervalle, $]0;1]$.
Montrer que la variable aléatoire $Z = a\sqrt{-2\ln(U)}$ suit la même loi que la variable aléatoire X.
(b) En déduire un programme `SciLab`, utilisant le générateur aléatoire `rand()`, simulant la variable aléatoire X, le réel a strictement positif étant entré par l'utilisateur.

Soit un entier $n \geq 2$. On considère un $n-$ échantillon de X noté $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

(9) On considère la variable aléatoire

$$A_n = \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right).$$

(a) Montrer que la variable aléatoire A_n est un estimateur sans biais de a.
(b) Déterminer le risque quadratique de l'estimateur A_n.

(10) On considère la variable aléatoire $M_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

(a) Montrer que pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$P(M_n > t) = \exp\left(-\frac{nt^2}{2a^2}\right).$$

(b) En déduire l'expression de la fonction de répartition de M_n.
(c) Montrer que M_n est une variable aléatoire à densité, admettant g_b comme densité avec

$$b = \frac{a}{\sqrt{n}}.$$

(d) Montrez que la variable aléatoire M_n admet une espérance et une variance que l'on calculera.
(e) En déduire un estimateur B_n, sans biais de a, de la forme $\lambda_n M_n$ avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$.
(f) Déterminer le risque quadratique de l'estimateur B_n.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[0;1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x\left(1 + \dfrac{1}{\ln(x)}\right), & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I - Étude de f

(1) Montrer que f est continue sur $[0;1[$.

(2) Déterminer l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $]0;1[$.

(3) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

(4) (a) Montrer que f est dérivable en 0.
(b) Expliciter le développement limité d'ordre 1 de f en 0.
(c) Justifier que f est dérivable sur $]0;1[$ puis, pour $x \in]0;1[$, calculer $f'(x)$.

(5) On pose, pour $y \in \mathbb{R}$, $g(y) = y^2 + y - 1$.
(a) Dresser le tableau de signes de $g(y)$.
(b) Montrer que, pour tout $x \in]0;1[$, $f'(x) = \dfrac{g(\ln(x))}{\ln(x)^2}$.

(c) En déduire que
$$f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq x_0,$$
où on a posé $x_0 = \exp\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

(6) Dresser le tableau de variations de f.

(7) Représenter graphiquement l'allure de la courbe de f. On fera apparaître la tangente en 0.
On donne
$$e^{-1} \simeq 0.37, \qquad x_0 \simeq 0.2, \qquad f(x_0) \simeq 0.08.$$

Partie II - Étude d'une suite et d'une série

On considère la suite (u_n) définie par
$$u_0 \in]0; x_0[, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

(8) Montrer que, pour tout $x \in]0; 1[$, $f(x) < x$ et en déduire que, pour $x \in [0; 1[$, $f(x) = x$ si et seulement si $x = 0$.

(9) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et que $u_n \in]0; x_0[$.

(10) Montrer que (u_n) est monotone.

(11) En déduire que (u_n) converge vers une limite à préciser.

(12) Écrire un programme `SciLab` qui demande à l'utilisateur de rentrer la valeur de x_0 et calcule puis affiche le plus petit entier n tel que $u_n \leq 10^{-3}$.

(13) Le but de cette dernière question est l'étude de la convergence de la série $\sum u_n$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \ln(u_{n+1})^2 - \ln(u_n)^2$.
Montrer que la série de terme général v_n diverge.

(b) Rappeler un équivalent en 0 de $\ln(1+x)$ et de $(1+x)^2 - 1$.

(c) Montrer que
$$v_n = \ln(u_n)^2 \left[\left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\ln(u_n)}\right)}{\ln(u_n)} \right)^2 - 1 \right].$$

(d) Déduire des deux questions précédentes que $v_n \sim 2,\ n \to +\infty$.

(e) **On admet** que $\ln(u_n)^2 \sim 2n,\ n \to +\infty$.
Montrer que
$$n^2 u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n \ln^4(u_n)}{4},$$
puis que
$$u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to +\infty.$$

(f) En déduire la nature de la série $\sum u_n$.