ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°1

À rendre au plus tard le 19/09

Toutes les réponses doivent êtres ***justifiées*** *et* ***soigneusement rédigées****.*

Exercice 1. À l'aide d'un équivalent, donner la limite des suites suivantes

$$(i)\ \frac{n^2+n+1}{2n+3+\frac{1}{n}}; \qquad (ii)\ \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{\ln(n+1)-\ln(n)}; \qquad (iii)\ \left(1+\frac{3}{n^2}\right)^n.$$

Exercice 2. (Un DL d'ordre 3). On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3).$$

(1) Donner alors le DL à l'ordre 3 en 0 de e^x et de $\ln(1-x)$.
(2) Donner un équivalent, pour $n \to \infty$, à chacune des deux suites

$$u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1, \qquad v_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

(3) Utiliser les DL précédents pour déterminer un équivalent de $u_n + v_n$.

Exercice 3. (**) Soit $\gamma > 0$. On introduit les suites

$$u_n = e^{\gamma n}, \quad \text{et} \quad v_n = n!.$$

(1) On considère le programme `SciLab` suivant

```
(1) gamma=1/4;
(2) N=100;
(3) u=exp(gamma*[1:N]);
(4) v=[1]
(5) for k=2:N
(6)     v=[v,v(k-1)*k]
(7) end
(8) w=u./v
(9) plot2d([1:N], w)
```

(a) De quelle suite la ligne `(3)` permet-elle de calculer les cent premiers termes ?
(b) Même question avec les commandes des lignes `(4)` à `(7)`?
(c) Que représente le graphique obtenu ? Que peut-on en conjecturer ?

(2) On se propose de démontrer de façon générale le résultat conjecturé à la question précédente.
   (a) Montrer qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geq N, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \times \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$
   (b) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$, telle que, pour tout $n \geq N$, on a
$$\frac{u_n}{v_n} \leq C \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}.$$
   (c) Conclure.

Exercice 4. Soit $p \in]0;1[$. On dispose d'une pièce de monnaie qui amène *Pile* avec la probabilité p, et *Face* avec la probabilité $1-p$.

On lance la pièce jusqu'à obtenir pour la seconde fois *Pile*. On note X la variable aléatoire égale au nombre de *Face* obtenus au cours des lancers. On suppose que la variable X est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Par exemple, si les lancers donnent successivement *Pile-Pile*, alors $X = 0$, et si les lancers donnent successivement *Face-Pile-Face-Face-Pile*, alors $X = 3$.

(1) (a) Déterminer $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.
   (b) Plus généralement, déterminer la loi de la variable aléatoire X.
   (c) Vérifier que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1.$$
(2) Que peut-on dire de l'événement « on n'obtient jamais deux *Pile* au cours d'une infinité de lancers de la pièce » ?
(3) Montrer que la variable X admet une espérance et la calculer.
(4) Compléter le script `SciLab` ci-dessous afin qu'il affiche une réalisation de la variable X

```
p=0.3;
S=0; n=0;
while S<2 do
    n=n+1;
    if ............  then
        S=S+1;
    end
end
disp(.............)
```