ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Cahier d'exercices

Période du 3 au 20 Avril

Problème

Partie 1

Toutes les matrices de cet exercice sont des éléments de l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit les deux applications suivantes, notées d et t,

$$d : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & ad - bc \end{array}, \qquad \text{et} \qquad t : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & a + d \end{array}.$$

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on appellera $d(A)$ le *déterminant* de A et $t(A)$ sa *trace*.

(1) **Propriétés de la trace**.

(a) Montrer que t est une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
(b) Déterminer l'image de t.
(c) En déduire la dimension du noyau de t.
(d) Établir que si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on a: $t(AB) = t(BA)$.
(e) Soit P une matrice carrée de taille 2 inversible. Montrer que $t(P^{-1}AP) = t(A)$.
(f) En déduire que deux matrices semblables ont la même trace. La réciproque est-elle vraie?

(2) **À propos du déterminant**.

(a) Calculer $d(2I)$. En déduire que l'application d n'est pas linéaire.
(b) Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Établir la formule: $d(AB) = d(A) \times d(B)$.
(c) On suppose que P est une matrice carrée de taille 2 inversible. Montrer que $d(P)$ est non nul.
(d) Soit P une matrice carrée de taille 2 inversible. Montrer que $d(P^{-1}AP) = d(A)$.
(e) En déduire que deux matrices semblables ont le même déterminant. La réciproque est-elle vraie?

(3) **Lien entre les valeurs propres, la trace et le déterminant.**

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable de spectre $\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

(a) Utiliser les questions (1f) et (2e) pour montrer que
$$\lambda_1 + \lambda_2 = t(A), \qquad \text{et} \qquad \lambda_1 \lambda_2 = d(A).$$

(b) Retrouver ce résultat avec une autre méthode, par identification de polynômes.

Partie 2

On considère l'application $F : U =]1; +\infty[^2 \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$ par :
$$F(x, y) = \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$$

(4) Représenter graphiquement U.
(5) Justifier que F est de classe C^2 sur l'ouvert U.
(6) Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x, y) de $U =]0; +\infty[^2$.
(7) On introduit la fonction φ définie sur $[0; +\infty[$ par
$$\varphi(t) = \begin{cases} t^2 \ln(t), & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que φ est continue sur $[0; +\infty[$.
(b) Montrer que φ est dérivable en 0 et préciser $\varphi'(0)$. En déduire que φ est dérivable sur $[0; +\infty[$.
(c) Montrer φ réalise une bijection de $]1; +\infty[$ sur un intervalle à préciser.

(8) Montrer que $(x, y) \in U$ est un point critique de F si et seulement si
$$\begin{cases} \varphi(x) & = & \varphi(y) \\ \dfrac{1}{xy} & = & \dfrac{\ln(x)}{y^2} \end{cases}$$

(9) En déduire que (e, e) est le seul point critique un point critique de F sur U.
(10) Calculer les dérivées partielles secondes de F en tout (x, y) de U.
(11) Utiliser la question (3) pour déterminer la nature du point critique précédent. En déduire que F ne présente pas d'extremum (local ou global) sur U.
(12) Qu'en est-il si on considère F sur $\overline{U} = [1; +\infty[\times [1; +\infty[$? (*On pourra évaluer F en $(1, 1)$.*)

Partie 3

(13) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non colinéaire à I. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ représenté par A dans la base canonique (e_1, e_2). On introduit $w = e_1 + e_2$.

(a) Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$,
$$f^2(u) = t(A) f(u) - d(A) u.$$

(b) En déduire un polynôme annulateur de A.

(c) (i) Montrer, par l'absurde, que e_1 et e_2 ne peuvent pas être simultanément vecteurs propres de f associés à la même valeur propre.
(ii) Montrer que e_1, e_2 et w ne peuvent être simultanément vecteurs propres de f.

(d) En déduire qu'il existe au moins un vecteur non nul x de $\mathbb{R}^2$ tel que la famille $(x, f(x))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.

(e) En déduire, à l'aide de la question (13a) l'expression de la matrice M représentant u dans la base $(x, f(x))$.

(f) En déduire que la matrice A est semblable à sa transposée ${}^tA$.

(14) Prouver la réciproque de la question (2c).

Exercice 1

On considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)}, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(1) (a) Montrer que pour tout $x > 0 : x - \ln(x) > 0$. En déduire que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Montrer que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$.

(d) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer, pour $x > 0$, $f'(x)$.

(e) Dresser le tableau de variations de f, en y incluant la limite en $+\infty$, scrupuleusement justifiée.

(2) Étudier le signe de $f(x)$.

(3) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que F est bien définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ puis étudier ses variations.

(b) Déterminer

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t.$$

(c) En déduire la limite de $F(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 2

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel non nul. On définit

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i} = \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} + \cdots + \binom{2n}{2n}.$$

(1) (a) Calculer $S_1,\ S_2,\ S_3$.

(b) Justifier que

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} = 2^{2n}.$$

(c) En déduire que

$$S_n = 2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}.$$

On commencera par montrer que

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{i}+\binom{2n}{n}=2S_n.$$

(2) Pour p entier naturel non nul, on pose $u_p=\dfrac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}}$.

(a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul, $u_{p+1}=\dfrac{2p+1}{2p+2}u_p$.

(b) En déduire , par récurrence, que, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $u_p\leq\dfrac{1}{\sqrt{2p+1}}$.

(c) En déduire alors $\lim_{p\to+\infty}u_p$.

(3) **Cours en bourse d'une action.**

On suppose les variations journalières d'une action indépendantes les unes des autres. On convient de noter 0 le cours correspondant au jour $j=0$ (début de l'observation), et on suppose que, chaque jour, le cours:

- monte d'une unité $(+1)$ avec une probabilité p $(0<p<1)$;
- ou descend d'une unité (-1) avec la probabilité $q=1-p$.

On note X_{2n} le cours constaté le $2n^{ième}$ jour suivant le début de l'observation.

Par exemple, si $n=2$ et que le cours a baissé les trois premiers jours et monté le quatrième jour, on a $X_4=-1-1-1+1=-2$.

(a) Déterminer $X_{2n}(\Omega)$.

(b) On note Y_{2n} le nombre de jours (durant les $2n$ jours d'observation) où l'action a monté, et Z_{2n} le nombre de ceux où elle a baissé.

(i) Quel lien y a-t-il entre Y_{2n} et Z_{2n}?
(ii) Expliciter les lois de Y_{2n} et Z_{2n} et préciser leurs espérances et leurs variances.
(iii) Que vaut $\operatorname{cov}(Y_{2n},Z_{2n})$? Commenter.

(c) Quelle autre relation lie X_{2n}, Y_{2n} et Z_{2n}? En déduire l'expression de $E(X_{2n})$. Interpréter le cas particulier $p=1/2$.

(d) Montrer que, pour tout $k\in[\![-n;n]\!]$,

$$P(X_{2n}=2k)=\binom{2n}{n+k}p^{n+k}q^{n-k}.$$

(e) On suppose, dans cette question que $p=1/2$. On note

$$p_n=P(X_{2n}\geq 0).$$

Montrer que

$$p_n=\frac{1}{2}+\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n+1}}.$$

Que valent $p_1,\ p_2,\ p_3$?.
Que se passe-t-il quand n devient grand ?

Exercice sous `SciLab`

On étudie une méthode de détection des porteurs d'un virus au sein d'un ensemble donné de N individus tirés au sort. La probabilité d'être porteur du virus dans la population est $p \in]0;1[$. Les personnes sont atteintes indépendemment les unes des autres.

On dispose d'un test permettant d'établir de façon certaine qu'un échantillon de sang contient ou non le virus, le résultat de ce test étant dit positif dans le premier cas et négatif dans le second.

Pour chacun des N individus, on possède un prélèvement sanguin. On envisage alors deux méthodes de détection:

- Première méthode: on teste un à un les N prélèvements, effectuant ainsi N tests.

- Seconde méthode (*poolage*):
  - On fixe un entier naturel non nul ℓ. On suppose que N est un multiple de ℓ et on pose $N = n \times \ell$. On répartit alors les N prélèvements en n groupes $G_1, G_2, \ldots, G_n$, chaque groupe G_i contenant le même nombre ℓ de prélèvements. Pour chacun des groupes G_i, on extrait une quantité de sang de chacun des l prélèvements qu'il contient, puis on mélange ces extraits, obtenant ainsi un échantillon de sang H_i, caractéristique du groupe G_i.

  - On teste alors H_i:
    - si le test de H_i est négatif, aucun des individus au sein du groupe G_i n'est porteur du virus. Le travail sur le groupe G_i est alors terminé;
    - si le test de H_i est positif, on teste un à un les prélèvements de G_i pour détecter les porteurs du virus au sein du groupe G_i.

Soient X la variable aléatoire égale au nombre de groupes G_i pour lesquels le test de H_i a été positif et T la variable aléatoire égale au nombre total de tests effectués dans la réalisation de la méthode du poolage.

(1) Écrire une fonction `y=pool(`ℓ`,p)` simulant le test sur un groupe de taille ℓ (avec probabilité p de contamination de chaque individu). (La fonction renverra 0 ou 1 selon que le test est négatif ou non).
(2) Écrire alors une fonction `[X,T]=poolage_sanguin(N,p,`ℓ`)` renvoyant le résultat simultané de la simulation de X et T.
(3) Proposer une comparaison détaillée, avec une estimation de $E(T)$, dans le cas où $N = 1000$, $p = 1,3\%$ en faisant varier raisonnablement N.

Exercice 3***

On considère une variable aléatoire X admettant une espérance, notée m, et une variance, notée σ^2.

(1) Rappeler les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

(2) Soient $\alpha \geq 0$ et $\lambda \geq 0$ fixés.
   (a) Montrer que $P(X - m \geq \alpha) = P(X - m + \lambda \geq \alpha + \lambda)$.
   (b) Déterminer $E((X - m + \lambda)^2)$.

(c) En déduire que

$$P(X - m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(\alpha + \lambda)^2}.$$

(d) Étudier les variations (et extremums) sur $[0; +\infty[$ de

$$\varphi : \ \lambda \mapsto \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(\alpha + \lambda)^2}.$$

(e) En déduire alors que pour un bon choix de λ, on a l'inégalité de *Cantelli*,

$$P(X - m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2}.$$

(f) Avec la même méthode, montrer que

$$P(X - m \leq -\alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2}.$$

(3) Montrer qu'on a

$$P(|X - m| \geq \alpha) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2}.$$

Cette inégalité est-elle meilleure que celle de Bienaymé-Tchebychev?