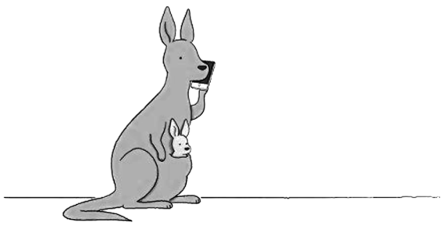
ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com



Devoir Maison n°11

Période du 11 au 25 Mai

Problème

Pour toutes suites numérique $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$, on définit[1] la suite $u \star v = w$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \, v_{n-k}.$$

Partie I: Exemples et premiers résultats

(1) Pour tout entier naturel n, calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

$$(i)\ u_n = 2 \text{ et } v_n = 3, \qquad (ii)\ u_n = 2^n \text{ et } v_n = 3^n, , \qquad (iii)\ u_n = \frac{2^n}{n!} \text{ et } v_n = \frac{3^n}{n!}.$$

(2) Écrire un programme en `SciLab` qui demande à l'utilisateur une valeur de l'entier naturel n, qui calcule et affiche les valeurs $w_0,\ w_1,\ \dots,\ w_n$, où les suites u et v sont définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \ln(n+1) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n+1}.$$

(3) Dans cette question, la suite u est définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

(a) Établir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) vérifiant $n < m$, l'inégalité:

$$\sum_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n.$$

(b) Soit n un entier strictement supérieur à 1. Prouver les inégalités:

$$w_{2n} \leqslant v_0 \, u_{2n} + 2v_n + v_1 \, u_n \quad \text{et} \quad w_{2n+1} \leqslant v_0 \, u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1 \, u_n$$

[1]Cette opération, à titre purement informatif, s'appelle le *produit de convolution (discret)* des suites u et v

(c) En déduire que les deux suites (w_{2n}) et (w_{2n+1}) convergent vers 0 ainsi que la suite (w_n).

(d) Soit u' la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u'_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

À l'aide de la question précédente, montrer que la suite $u' \star v$ est convergente et de limite nulle.

Partie II : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}).$$

(1) Montrer que toute suite décroissante de réels positifs est élément de A et qu'une suite strictement croissante ne peut appartenir à A.

(2) Soit $z = (z_n)$ une suite réelle vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + z_{n-1}).$$

(a) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad z_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

(b) En déduire qu'il existe des suites appartenant à A et non monotones.

(3) Soit $a = (a_n)$ un élément de A et b la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

On définit alors la suite c par $c_0 = a_0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad c_n = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1}.$$

(a) Montrer que la suite c est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle converge vers un nombre ℓ que l'on ne cherchera pas à calculer.

(b) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n.$$

Que peut-on en déduire pour les suites $b \star c$ et a?

(c) Soit ε la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \varepsilon_n = c_n - \ell$$

et d la suite $b \star \varepsilon$.

En utilisant un résultat de la Partie I, montrer que la suite d converge vers 0.

(d) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité

$$d_n = a_n - \frac{2}{3}\ell\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

En déduire que la suite a converge et préciser sa limite.

Partie III : Application aux variables aléatoires

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires envisagées sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

(1) **Résultats préliminaires**.

(a) On considère deux distributions de probabilités $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ (que l'on associe respectivement à deux variables aléatoires X et Y supposées **indépendantes**). Montrer que la loi de $X + Y$ est donnée par $u \star v$.

(b) Retrouver alors le résultat de la question $(1) - (iii)$ de la Partie I par un choix adéquat des lois de X et de Y.

(c) Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que la variable aléatoire 2^{-Z} admet une espérance et que celle-ci vaut

$$\mathrm{E}\left(2^{-Z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P([Z = n]) \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

On note $r(Z)$ cette espérance.

(d) Que peut-on dire des variables aléatoires 2^{-X} et 2^{-Y}?
En déduire l'égalité

$$r(X + Y) = r(X)r(Y).$$

(e) On considère une suite (X_n) de v.a.i.i.d, à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Pour tout entier naturel non nul q, on désigne par S_q la variable aléatoire définie par

$$S_q = \sum_{i=1}^{q} X_i.$$

Établir l'égalité

$$r(S_q) = (r(X_1))^q .$$

(2) **Une formule sommatoire**.

(a) Montrer que la suite $u = (u_n)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

est une distribution de probabilité. On note Z une variable aléatoire telle que $P(Z = n) = u_n$. Calculer alors le nombre $r(Z)$.

(b) On suppose que (X_n) est une suite de v.a.i.i.d de même loi que Z et, pour tout entier naturel non nul q, on désigne encore par S_q la variable

$$S_q = \sum_{i=1}^{q} X_i.$$

En admettant[2], pour tout entier naturel non nul q, l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+q}{q} = \binom{n+q+1}{q+1},$$

montrer par récurrence que la loi de S_q est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P([S_q = n]) = \binom{n+q-1}{q-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+q} .$$

[2]Égalité classique que l'on rencontre dans pléthore de sujets et qu'il faut savoir démontrer

(c) Pour tout entier naturel non nul q, calculer le nombre $r(S_q)$ et en déduire la relation

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+q-1}{q-1} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^q.$$

(3) **Un exemple concret**.

On admet, dans cette question, que la variable aléatoire Z définie précédemment représente le nombre de petits devant naître en 2020 d'un couple de kangourous.

Chaque petit kangourou a la même probabilité 1/2 d'être mâle ou femelle, indépendamment des autres.

On note F la variable aléatoire égale au nombre de femelles devant naître en 2020.

(a) Préciser, pour tout entier naturel n, la loi conditionnelle de F sachant $[Z = n]$.
(b) À l'aide de la formule obtenue en 2c, montrer que la loi de F est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P([F = n]) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

(c) Justifier l'existence des espérances $E(Z)$ et $E(F)$ des variables aléatoires Z et F, puis vérifier l'égalité $E(Z) = 2\,\mathrm{E}(F)$.