



Devoir Maison n°2

À rendre au plus tard le 15 Octobre

Exercice 1. À l'aide de développements limités usuels en 0 montrer la continuité, puis la dérivabilité en 0 de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2/3} - 1}{x\sqrt{1+x}}, & \text{si } x \neq 0 \text{ et } x > -1 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 2. (Limites classiques et équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$).

(1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

(2) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0; 1[$.

(a) Déterminer un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(b) En déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{n}{k} x^n.$$

(3) (a) Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

(On pourra penser à utiliser une inégalité classique sur le logarithme, que l'on justifiera brièvement.)

(b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n).$$

(c) Donner alors un équivalent, lorsque $n \rightarrow +\infty$ de

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

(d) Écrire un programme, sous SciLab, visant à obtenir une figure illustrant le résultat précédent.

Exercice 3. Justifier que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en fournir une base

$$(i) \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} 2x + y - t = 0 \\ y = t \end{cases} \right\},$$

$$(ii) E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ a+b & 2a+2b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad (iii) E_3 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = P(2)\}.$$

Exercice 4.

- (1) Déterminer les réels $a \in \mathbb{R}$ pour lesquels la famille $\{(2a, a-1); (a+3, a+1)\}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.
- (2) Déterminer les coordonnées du vecteur $(a, a+1)$ dans cette base.

Exercice 5. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \{P(A) : P \in \mathbb{R}[X]\}$.

- (1) Montrer que F est un espace vectoriel.
- (2) Montrer que A^2 est combinaison linéaire de I et A .
- (3) Montrer que $\text{Vect}(I, A) \subset F$.
- (4) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Écrire la division euclidienne de P par $X^2 - 1$. En déduire que $F \subset \text{Vect}(I, A)$.
- (5) Quelle est alors la dimension de F ?
- (6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'existence d'un unique couple de réels (a_n, b_n) tel que $A^n = a_n I + b_n A$.
- (7) Expliciter a_n et b_n en fonction de n .

Exercice 6. Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p , $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$.

On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise. (Toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant.)

On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

- (1) Quelles sont les lois des variables aléatoires N_V et N_B ? Rappeler la valeur de leurs espérances.

On définit la variable aléatoire X de sorte que $X = i$ si les i premières boules tirées sont blanches et la $(i+1)$ -ème est verte, ou si les i premières boules tirées sont vertes et la $(i+1)$ -ème est blanche.

- (2) Déterminer la loi de la variable aléatoire X .
- (3) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que

$$E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}.$$

- (4) Montrer que $E(X)$ est minimale lorsque $p = \frac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.