ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir Maison n°2

Solution

Exercice 1. On rappelle les développements limités, en 0, de e^u et de $\sqrt{1+x}$

$$e^u = 1 + u + o(u), \qquad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

Observons que l'on utilise le DL d'ordre 1 de e^u car on va l'appliquer à $u = x^2/3$ (qui tend bien vers 0 en 0) et qui permet d'avoir un DL d'ordre 2 de $e^{x^2/3}$. Plus précisément,

$$e^{x^2/3} = 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

Il suit que, pour $x \neq 0$ proche de 0

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2) - 1}{x\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)} \\ &= \frac{\frac{x^2}{3} + o(x^2)}{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \\ &= \frac{\frac{x}{2} + o(x)}{1 + \frac{x}{2} + o(x)} \\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 = f(0) \end{aligned}$$

et f est bien continue en 0. Pour la dérivabilité, il faut regarder la limite du taux d'accroissement en 0. Plus précisément, en réutilisant les identités ci-dessus,

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x}{3} + o(x)}{x(1 + \frac{x}{2} + o(x))} \\ &= \frac{\frac{2}{3} + o(1)}{1 + o(1)} \\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 2/3$.

Exercice 2.

(1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Commençons par écrire

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right).$$

Comme, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $x/n \to 0$, $n \to +\infty$, on a

$$\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \sim \frac{x}{n} \qquad \text{et} \qquad n\left(1+\frac{x}{n}\right) \sim x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x.$$

Par continuité de l'exponentielle, il suit que

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x.$$

(2) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0;1[$.

(a) La formule du coefficient binomial donne

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k}(n-k+i).$$

Or, à k fixé, $(n-k+i) \sim n, n \to +\infty$. Il suit donc que

$$\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}.$$

(b) D'après la question précédente,

$$\binom{n}{k}x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k x^n}{k!}.$$

Or, $x \in]0;1[$ donc, par croissance comparée,

$$\lim_{n\to+\infty}\binom{n}{k}x^n = 0.$$

(3) (a) On veut montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

Si l'inégalité de droite s'obtient à partir de l'inégalité classique $\ln(1+x) \leq x$ (avec $x = 1/k$) - que l'on justifie par un argument de concavité par exemple - celle de gauche n'est pas si immédiate. On peut l'obtenir de plusieurs manières différentes. On pourrait étudier la fonction $x \mapsto 1/(x+1) - \ln(x+1) + \ln(x)$ par exemple. Mais on peut aussi utiliser l'inégalité des accroissements finis. En effet, la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[k;k+1]$. Sa dérivée vaut $f'(x) = \frac{1}{x}$, quantité qui est minimale sur l'intervalle $[k;k+1]$ en $x = k+1$. Ainsi

$$\ln(k+1) - \ln(k) = f(k+1) - f(k) \geq \min_{x\in[k;k+1]} f'(x)(k+1-k) = \frac{1}{k+1}.$$

(b) On somme la partie de gauche de l'encadrement précédent pour k allant de 1 à $n-1$. Cela donne

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1}(\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n) - \ln(1) = \ln(n)$$

par télescopage. Un changement d'indice $j = k+1$ donne alors

$$\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j} \leq \ln(n)$$

puis on rajoute 1 de chaque côté pour obtenir

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} \leq 1 + \ln(n).$$

Ensuite, on revient à la partie droite de l'encadrement obtenu à la question précédente que l'on somme pour k allant de 1 à n. Ce qui donne, toujours par télescopage,

$$\ln(n+1) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Au final, on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n).$$

(c) L'encadrement précédent permet sans difficulté d'affirmer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

En effet, en divisant tout par $\ln(n)$ (qui est strictement positif pour $n \geq 2$), on a

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} 1/k}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

Or,

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(1+1/n)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

et

$$1 + \frac{1}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

également. Par le théorème des gendarmes, le quotient tend vers 1, ce qui donne l'équivalent annoncé.

(d) On propose de représenter la suite des quotients $\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} 1/k}{\ln(n)}\right)_{n\geq 2}$.

```
function S=harmonique(n)
    S=cumsum([1:n].^(-1))// suite des sommes partielles
endfunction

N=1000
X=2:N
Y=log(X)
S=harmonique(N)(2:N) // on ne garde que les termes pour n>=2
Z=S./Y //quotient
plot2d(X, Z, -1)
```

Exercice 3. On s'inspirera bien de la manière de rédiger ce type de réponse.
On voit que

$$\begin{aligned} u = (x,y,z,t) \in E_1 &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y - t &=& 0 \\ y &=& t \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y &=& t \end{array} \right. \\ &\iff u = (0,y,z,y) = y(0,1,0,1) + z(0,0,1,0). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E_1 = \mathrm{Vect}((0,1,0,1);(0,0,1,0))$$

et c'est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ donc un espace vectoriel. De plus, la famille composée des deux vecteurs ci-dessus (qui engendrent E_1) est alors génératrice. Les deux vecteurs n'étant clairement pas colinéaires, ils forment une famille libre et finalement une base de E_1 (et on a $\dim E_1 = 2$).

On procède de la même manière pour E_2.

$$M =\in E_2 \iff M = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ a+b & 2a+2b \end{pmatrix} = (a+b)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a tout de suite

$$E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right).$$

Il suit que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel. De plus, il est engendré par un unique vecteur explicité ci-dessus (non nul) qui en forme donc une base (en particulier $\dim E_2 = 1$).

$$\begin{aligned} P(X) = aX^2 + bX + c \in E_3 &\iff P(1) = P(2) \\ &\iff a+b+c = 4a+2b+c \\ &\iff 3a+b = 0 \\ &\iff P(X) = aX^2 - 3aX + c = a(X^2-3X) + c \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E_3 = \mathrm{Vect}(X^2 - 3X, 1)$$

et E_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ donc un espace vectoriel. La famille $(X^2 - 3X, 1)$ est génératrice de E_3 et comme ces deux vecteurs ne sont clairement pas colinéaires, c'est aussi une famille libre et donc une base de E_3. (On peut donc en conclure que $\dim E_3 = 2$).

Exercice 4.

(1) Cette question nécessite une rédaction rigoureuse. Pour que deux vecteurs (non nuls) de $\mathbb{R}^2$ forment une base, il suffit qu'ils forment une famille libre. Ainsi, on cherche $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda(2a, a-1) + \mu(a+3, a+1) = (0,0) \iff \lambda = \mu = 0.$$

Ainsi, a est un paramètre et les inconnues du système (à paramètre) sont λ et μ. On a

$$\lambda(2a, a-1) + \mu(a+3, a+1) = (0,0) \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a\lambda + (a+3)\mu & = & 0 \\ (a-1)\lambda + (a+1)\mu & = & 0 \end{array}\right.$$

Afin de pouvoir commencer à faire un pivot de Gauss, il faut s'assurer que le premier pivot que l'on utilise est non nul et donc traiter un premier cas quand celui-ci vaut 0.

- Premier cas: Si $a = 0$.

  Le système devient

  $$\left\{\begin{array}{rcl} 2a\lambda + (a+3)\mu & = & 0 \\ (a-1)\lambda + (a+1)\mu & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 3\mu & = & 0 \\ -\lambda + \mu & = & 0 \end{array}\right. \iff \lambda = \mu = 0$$

  Ainsi, pour $a = 0$, la famille des deux vecteurs considérée est bien une base de $\mathbb{R}^2$.

- Si $a \neq 0$.

  On peut faire $(L2) \leftarrow 2a(L_2) - (a-1)(L_1)$. Le système devient

  $$\left\{\begin{array}{rcl} 2a\lambda + (a+3)\mu & = & 0 \\ (a-1)\lambda + (a+1)\mu & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a\lambda + (a+3)\mu & = & 0 \\ (a^2+3)\mu & = & 0 \end{array}\right. \iff \mu = \lambda = 0$$

  car, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a^2 + 3 \neq 0$. Ainsi, dans ce cas également la famille forme une base de $\mathbb{R}^2$.

En conclusion, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la famille $((2a, a-1); (a+3, a+1))$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.

(2) On cherche donc (l'unique) coupe (α, β) tel que
$$(a, a+1) = \alpha(2a, a-1) + \beta(a+3, a+1).$$
Il suffit alors de résoudre le système.
$$(a, a+1) = \alpha(2a, a-1) + \beta(a+3, a+1) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2a\alpha + (a+3)\beta & = & a \\ (a-1)\alpha + (a+1)\beta & = & a-1 \end{array} \right.$$
Dans le but de résoudre ce système, il faut encore distinguer deux cas (même si on sait qu'il y aura, pour tout $a \in \mathbb{R}$ un unique couple solution).

- Si $a = 0$. Dans ce cas, il est clair que
$$(0, 1) = -1(0, -1) + 0 \cdot (3, 1)$$
et les coordonées de $(0, 1)$ sont donc $(-1, 0)$ dans la base $((0, -1), (3, 1))$.

- Si $a \neq 0$. Comme précédemment,

$$\begin{aligned}
(a, a+1) = \alpha(2a, a-1) + \beta(a+3, a+1) &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2a\alpha + (a+3)\beta & = & a \\ (a-1)\alpha + (a+1)\beta & = & a+1 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2a\alpha + (a+3)\beta & = & a \\ (a^2+3)\beta & = & 2a(a+1) - a(a-1) = a^2 + 3a \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2a\alpha + (a+3)\beta & = & a - (a+3)\frac{a(a+3)}{a^2+3} \\ \beta & = & \frac{a(a+3)}{a^2+3} \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & \frac{-3(a+1)}{a^2+3} \\ \beta & = & \frac{a(a+3)}{a^2+3} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On vérifie bien que
$$(a, a+1) = \frac{-3(a+1)}{a^2+3}(2a, a-1) + \frac{a(a+3)}{a^2+3}(a+3, a+1).$$
Et d'ailleurs, cette relation reste vraie pour $a = 0$.

Exercice 5. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \{P(A) : \ P \in \mathbb{R}[X]\}$.

(1) Les éléments de F sont les matrices qui s'écrivent comme polynômes de la matrice A, c'est à dire comme combinaisons (linéaires) de puissances de A. On constate que
- La matrice nulle est bien un élément de F : c'est le polynôme nul appliqué à A;
- Si $M = P(A)$, $N = Q(A)$ (avec $P, Q \in \mathbb{R}[X]$) sont deux matrices de F et si λ, μ sont deux réels, alors
$$\lambda M + \mu N = \lambda P(A) + \mu Q(A) = (\lambda P + \mu Q)(A).$$
Or $\lambda P + \mu Q$ est un polynôme (car $\mathbb{R}[X]$ est un espace vectoriel) donc $\lambda M + \mu N$ est encore un élément de F qui est donc stable par combinaison linéaire.

Au final, F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel.

(2) Un calcul simple et direct donne
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \times I + 0 \times A,$$
et donc A^2 est bien combinaison linéaire de I et A.

(3) $I = A^2$, c'est donc le polynôme X^2 appliqué à A et donc $I \in F$. Naturellement, $A \in F$ (c'est le polynôme X appliqué à A). Ainsi, comme F est un espace vectoriel, toute combinaison linéaire de I et A (qui sont des éléments de F) est encore un élément de F, ou encore
$$\text{Vect}(I, A) \subset F.$$

(4) Par définition de la division euclidienne des polynômes, il existe un polynôme $Q(X)$ et un polynôme $R(X)$, avec $\deg(R(X) < 2$ (car $\deg(X^2-1)=2$) tels que

$$P(X) = (X^2-1)Q(X) + R(X) = (X^2-1)Q(X) + aX + b,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. On peut en effet écrire $R(X) = aX + b$ car son degré est strictement inférieur à 2 (c'est à dire inférieur ou égal à 1). On applique la relation de division euclidienne ci-dessous à A. Notant que le polynôme constant égal à 1 appliqué à A donne l'identité. On a

$$P(A) = (A^2 - I)Q(A) + aA + bI.$$

Or, $A^2 = I$ donc $A^2 - I = 0$ et on obtient que

$$P(A) = aA + bI$$

ou encore $P(A)$ s'écrit comme combinaison linéaire de A et de I. Comme P est choisi quelconque dans $\mathbb{R}[X]$, on a donc $F \subset \mathrm{Vect}(I, A)$ mais par double inclusion ou peut déduire

$$F = \mathrm{Vect}(I, A).$$

.

(5) La famille (I, A) est alors génératrice de F. Celle-ci étant clairement libre (la matrice A et la matrice I ne sont pas colinéaires), elle forme une base de F ce qui permet de conclure que F est de dimension 2.

(6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $A^n \in F$ (c'est le polynôme X^n appliqué à A) et que (I, A) forme une base de F, il existe un unique couple de réels (a_n, b_n) tels que $A^n = a_n I + b_n A$ (il s'agit des coordonnées de A^n dans la base (I, A)).

(7) Pour expliciter a_n et b_n (qui sont les coefficients du polynôme *reste*), la méthode est de revenir à l'équation de division euclidienne et d'y injecter les racines de polynôme par lequel on fait la division.

$$X^n = (X^2-1)Q(X) + b_n X + a_n.$$

En injectant $X = 1$ et $X = -1$ dans l'équation, on trouve

$$\begin{cases} 1 &= a_n + b_n \\ (-1)^n &= a_n - b_n \end{cases} \iff \begin{cases} a_n &= \frac{1+(-1)^n}{2} \\ b_n &= \frac{1-(-1)^n}{2} \end{cases}$$

Ceci permet notamment d'écrire que

$$A^n = \frac{1+(-1)^n}{2} I + \frac{1-(-1)^n}{2} A = \begin{pmatrix} \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. (D'après **EML 1998**) Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p, $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$.

On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise. (Toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant.)

On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

(1) N_V est le rang du premier V dans une suite de tirages indépendants avec $\mathrm{P}(V) = p$ (équiprobabilité des boules) à chaque tirage. Donc $N_V \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et de même $N_B \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p)$. D'après le cours, on a donc

$$E(N_V) = \frac{1}{p}, \qquad E(N_B) = \frac{1}{1-p}.$$

On définit la variable aléatoire X de sorte que que $X = i$ si les i premières boules tirées sont blanches et la $(i+1)-$ème est verte, ou si les i premières boules tirées sont vertes et la $(i+1)-$ème est blanche.

(2) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $(X = k)$ signifie que l'on a k verte puis une blanche ou inversement. Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X = k) &= \mathrm{P}\left((N_V = k+1) \cup (N_B = k+1)\right) \\
&= \mathrm{P}(N_V = k+1) + \mathrm{P}(N_B = k+1) \\
&= (1-p)^k p + p^k (1-p).
\end{aligned}$$

(3) Comme les valeurs prises par la variable aléatoire X sont positives, celle-ci admet une espérance si et seulement si la série de terme général $kP(X = k)$ est convergente. Or

$$kP(X = k) = k\left((1-p)^k p + p^k (1-p)\right) = p(1-p)k(1-p)^{k-1} + p(1-p)kp^{k-1},$$

et on reconnait une combinaison de deux termes généraux de séries géométriques dérivées (de raison p et $(1-p)$) convergentes. Donc notre série converge et X admet une espérance. De plus,

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left((1-p)^k p + p^k (1-p)\right) \\
&= p(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} + p(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} \\
&= p(1-p) \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} + p(1-p) \times \frac{1}{(1-p))^2} \\
&= \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p},
\end{aligned}$$

ce qui était attendue.

(4) Considérons alors la fonction f définie sur $]0;1[$ par

$$f(p) = E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}.$$

Cette fonction est combinaison de quotients de polynomes dont les dénominateurs ne s'annulent pas sur $]0;1[$ donc elle est dérivable et

$$f'(p) = \frac{2p-1}{p^2(1-p)^2}$$

ce qui permet de dresser le tableau de variations de f

p	0		$1/2$		1
$f'(p)$	‖	$-$	0	$+$	‖
f	‖	$+\infty$ ↘	2	↗ $+\infty$	‖

On peut alors conclure que $E(X)$ est minimale lorsque $p = 1/2$ (et elle vaut alors 2); c'est quand on a les mêmes proportion de vertes et de blanches que l'on a en moyenne, les listes monocolore les plus courtes.