ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir Maison n°3

Cahier de vacances d'Automne
À rendre le 05/11

Les exercices 1 *à* 3 *ainsi que le problème de ce devoir sont à faire* ***individuellement****, en temps limité (4 heures) et sans aide ni document quelconque. Toutes les réponses doivent êtres* ***justifiées*** *et* ***soigneusement rédigées****.*

Échauffement

(1) Soit (u_n) une suite définie par
$$u_0 > 2, \qquad u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1.$$
 (a) Quelles sont les limites possibles de cette suite ?
 (b) Quel est son sens de variation ?
 (c) Que dire de sa limite ?
 (d) Écrire un programme `SciLab` permettant de calculer et d'afficher u_n où n est rentré par l'utilisateur.

(2) Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n qui à tout réel x associe le nombre
$$f_n(x) = n - xe^x.$$
 (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0; +\infty[$. Cette solution sera notée u_n.
 (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant $f_{n+1}(u_n)$, montrer que la suite (u_n) est croissante.
 (c) Montrer par l'absurde que la suite (u_n) n'est pas convergente. Qu'en déduit-on sur sa limite?
 (d) Déterminer u_0. Proposer un programme `SciLab` permettant de calculer et d'afficher une valeur approchée à 10^{-3} de u_1.

(3) Déterminer une base, puis la dimension, de l'espace vectoriel
$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : \ P(X) - P(X+1) = 0\}.$$

(4) Calculer les sommes doubles suivantes
$$(i) \ \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i-j), \qquad (ii) \ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{i}{j+n}, \qquad (iii) \ \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{2^{i+j}}{i!j!}.$$

Exercice 1

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixés, on pose

$$\Gamma_k = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \ A^k M = A^{k-1} M\}.$$

(1) (a) Montrer que Γ_k est un espace vectoriel.
(b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a: $\Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}$.

(2) **Un cas particulier.** On suppose dans cette question uniquement que $n = 3$ et que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que $\Gamma_1 = \{0\}$.
(b) Déterminer une famille génératrice puis une base et la dimension de Γ_2.
(c) Même question pour Γ_3.

(3) **On revient au cas général.**
(a) Montrer que si A est inversible, alors $\Gamma_1 = \Gamma_2$.
(b) On s'intéresse à la réciproque. On suppose donc que $\Gamma_1 = \Gamma_2$.
(i) On suppose que A n'est pas inversible. Justifier qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X \neq 0$ et $AX = 0$.
(ii) Soit M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les colonnes sont identiques et égales à X. Montrer que $M \in \Gamma_2$.
(iii) Conclure.

(4) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_k = \dim(\Gamma_k)$.
(a) Montrer que la suite (u_k) est croissante.
(b) Par quoi est-elle majorée ?
(c) Conclure qu'elle converge.
(d) Montrer alors qu'il existe un unique entier p tel que

$$\forall k < p, \ u_k < u_{k+1} \quad \text{et} \quad \forall k \geq p, \ u_k = u_p.$$

Exercice 2

(1) Rappeler la formule de Taylor-Young, à l'ordre 2 au voisinage de 0.
(2) Soit $f : \ t \mapsto \ln(1+t) - t$.
(a) Donner le domaine de définition de f puis un équivalent de $f(t)$ au voisinage de 0.
(b) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} f\left(\frac{1}{n}\right)$.

(3) On considère un nombre réel $a > 0$ et une suite à termes strictement positifs $(u_n)_{n\geq 1}$. On introduit alors les suites (w_n) et (ℓ_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$w_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{a}{n}, \qquad \ell_n = \ln(n^a u_n).$$

On **suppose** que la série de terme général w_n est absolument convergente.

(a) Montrer la convergence des séries $\sum_{n\geq 1} w_n^2$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{w_n}{n}$.

(b) Vérifier que
$$\ell_{n+1} - \ell_n = f\left(w_n - \frac{a}{n}\right) + w_n + af\left(\frac{1}{n}\right).$$

(c) Préciser
$$\lim_{n\to+\infty} w_n - \frac{a}{n}.$$
puis la nature de la série $\sum_{n\geq 1} f\left(w_n - \frac{a}{n}\right)$.

(d) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1}(\ell_{n+1} - \ell_n)$.

(e) Que peut-on en déduire à propos de la suite (ℓ_n)?

(f) Conclure qu'il existe une constante $A > 0$ telle que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A}{n^a}.$$

(4) Application. On considère la suite (u_n) définie, pour $n \geq 1$ par
$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}.$$

(a) Expliciter u_1, u_2, u_3.

(b) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la formule ci-dessous et C_n sa courbe représentative.
$$f_n = \begin{cases} xe^{-n/x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Partie I : Étude des fonctions f_n

(1) Montrer que f_n est continue à droite en 0.

(2) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et donner la valeur de $(f_n)'_d(0)$.

(3) La fonction f_n est-elle dérivable à gauche en 0? Que peut-on en déduire concernant C_n?

(4) Montrer que f_n est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel x non nul, calculer $f_n'(x)$ puis étudier son signe.

(5) Calculer les limites de f_n en $+\infty$, $-\infty$ et 0^-, puis donner le tableau de variations de f_n.

(6) Montrer que, lorsque x est au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$, on a
$$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

(7) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, ainsi qu'au voisinage de $-\infty$, C_n admet une asymptote oblique D_n dont on donnera une équation. Préciser la position relative de D_n et C_n aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.

Partie II : Un équivalent d'une suite implicite

(7) Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera u_n, tel que $f_n(u_n) = 1$.

(8) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n est strictement supérieur à 1 et que u_n est solution de l'équation

$$(E_n) \qquad x\,\ln(x) = n.$$

(9) Étudier la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = x\,\ln(x)$. En déduire, en utilisant la fonction g^{-1} dont on justifiera l'existence, que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

(10) Justifier la relation $\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n)$, puis montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} = 1.$$

(11) En déduire que

$$u_n \sim \frac{n}{\ln(n)}$$

Problème

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.

On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note :

B_k l'événement : "on obtient une boule bleue au k-ième tirage"
R_k l'événement : "on obtient une boule rouge au k-ième tirage"

Partie I : Simulation informatique

(1) Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience étudiée et renvoie le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages, l'entier n étant entré en argument.

```
function s=DM3(n)
    b=1 // b désigne le nombre de boules bleues présentes dans l'urne
    r=2 // r désigne le nombre de boules rouges présentes dans l'urne
    s=0 // s désigne le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages
    for k=1:n
        x=rand()
        if ... then
            ...
        else
            ...
        end
    end
endfunction
```

(2) On exécute le programme suivant :

```
n=10
m=0
for i=1:1000
    m=m+DM3(n)
end
disp(m/1000)
```

On obtient `6.657`. Comment interpréter ce résultat?

Partie II : Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

(3) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$P\left(Y = n\right) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

(b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance? une variance?

Partie III : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

On définit, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si on obtient une boule rouge au k-ième tirage et égale à 0 sinon.

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges au cours des n premiers tirages.

(4) Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre S_n et certaines variables aléatoires X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

(5) Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.

(6) (a) Déterminer les probabilités $P\left((X_1 = i) \cap (X_2 = j)\right)$ pour $(i, j) \in [\![0; 1]\!]^2$.

(b) En déduire la loi de X_2.

(7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0; n]\!]$.

(a) Calculer

$$P\left(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n\right).$$

(b) Justifier que

$$P\left(S_n = k\right) = \binom{n}{k} P\left(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n\right),$$

puis en déduire que

$$P\left(S_n = k\right) = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}.$$

(8) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et $E(S_n) = \dfrac{2n}{3}$.

(9) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$,

$$P_{[S_n = k]}\left(X_{n+1} = 1\right) = \frac{k+2}{n+3}.$$

(b) En déduire que

$$P\left(X_{n+1}=1\right)=\frac{E(S_n)+2}{n+3}.$$

(c) Déterminer alors la loi de la variable aléatoire X_{n+1}. Que remarque-t-on?

Partie IV : Étude d'une fonction de répartition et de sa limite

On s'intéresse dans cette partie à la proportion de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = S_n/n$.

(10) Justifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$P(T_n \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(11) Soit $x \in [0;1]$. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$P\left(T_n \leqslant x\right)=\frac{\left(\lfloor nx\rfloor+1\right)\left(\lfloor nx\rfloor+2\right)}{(n+1)(n+2)}$$

où $\lfloor . \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

(12) En déduire que, pour tout $x \in [0;1]$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} P(T_n \leq x) = x^2.$$