ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°3

Cahier de vacances d'Automne
Solution

Échauffement

(1) Soit (u_n) une suite définie par

$$u_0 > 2, \qquad u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1.$$

(a) Si (u_n) converge vers une certaine limite ℓ, par passage à la limite dans la relation de récurrence, on a

$$\begin{aligned} \ell = \ell^2 - 2\ell + 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (\ell - 1)^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \ell = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, la seule limite finie possible est $\ell = 1$. Il est aussi possible que la série diverge vers $+\infty$.

(b) On voit que

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1 - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \geq 0$$

et donc (u_n) est croissante.

(c) D'après le théorème de convergence monotone, (u_n) étant croissante, soit elle est bornée et admet une limite finie, soit elle diverge vers $+\infty$. Supposons qu'elle admette une limite finie ℓ. D'après la première question, c'est nécessairement $\ell = 1$. Mais, par croissante de (u_n) on a

$$u_n \geq u_0 > 2$$

et par passage à la limite

$$1 = \ell \geq 2$$

ce qui est absurde. Donc (u_n) diverge, et dans ce cas c'est vers $+\infty$,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

(d) Il faut aussi que le premier terme de la suite soit rentré par l'utilisateur. On propose le script suivant

```
u=input('u0=?')
n=input('n=?')
for k=1:n
    u=u^2-u+1;
end
disp(u)
```

À noter que dans le cas d'une fonction, le programme serait le suivant

```
u0=input('u0=?')
function u=suite(n)
u=u0;
for k=1:n
    u=u^2-u+1;
end
endfunction
```

(2) Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n qui à tout réel x associe le nombre

$$f_n(x) = n - xe^x.$$

(a) On étudie la fonction f_n (pour $n \in \mathbb{N}$ fixé) sur l'intervalle $[0; +\infty[$. C'est une combinaison de fonctions usuelles dérivables donc elle-même dérivable (et *a fortiori* continue) sur $[0; +\infty[$). On a, pour tout $x \geq 0$,

$$f_n'(x) = -(x+1)e^x < 0$$

et f_n est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. Le théorème de bijection s'applique (la fonction est bien continue) pour affirmer que f_n réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $]\lim_{x\to+\infty} f_n(x); f_n(0)]$ $]-\infty; n]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \in]-\infty; n]$ et admet donc un unique antécédent par f_n, ou encore l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution, notée u_n, sur $[0; +\infty[$.

$$f_n(x) = 0 \iff x = u_n.$$

On a

$$f_n(u_n) = 0 \iff n - u_n e^{u_n} = 0 \iff u_n e^{u_n} = n.$$

(b) Le calcul donne, en injectant l'égalité ci-dessus,

$$f_{n+1}(u_n) = n + 1 - u_n e^{u_n} = n + 1 - n = 1 > 0 = f_{n+1}(u_{n+1}).$$

Or f_{n+1} est bijective et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ (donc f_{n+1}^{-1} a le même sens de variation) et

$$u_n < u_{n+1}$$

donc la suite (u_n) est croissante.

(c) Supposons que (u_n) converge vers une limite finie ℓ. On passe à la limite dans la relation

$$u_n e^{u_n} = n.$$

Le membre de gauche tend vers ℓe^ℓ qui est une valeur finie, alors que le membre de droite tend vers $+\infty$. C'est une contradiction. Ainsi (u_n) ne peut être convergente. Comme elle est croissance, le théorème de convergence monotone affirme qu'elle diverge vers $+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

(d) On constate que $f_0(0) = 0$. Comme la solution est unique, on a nécessairement $u_0 = 0$. Pour une approximation de u_1, c'est un programme de dichotomie classique. On constate quand même que $u_1 \in [0 : 1]$ car $f_1(1) = 1 - e < 0$.

```
function y=f1(x)
    y=1-x*exp(x)
endfunction

a=0;
b=1;
c=(a+b)/2;
while (b-a)>= 10^(-3)
    if f1(a)*f(c) <=0 then
        b=c;
    else
        a=c;
   end
c=(a+b)/2;
end
disp(c)
```

(3) On cherche une base, pour déterminer la dimension, de l'espace vectoriel

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] :\ P(X) - P(X+1) = 0\}.$$

On commence par chercher une famille génératrice en faisant un apparaître un système sur les composantes d'un polynôme $P \in E$.

$$\begin{aligned}
P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in E &\iff aX^3 + bX^2 + cX + d - \big(a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d\big) = 0\\
&\iff aX^3 + bX^2 + cX + d - aX^3 - 3aX^2 - ...\\
&\qquad ... - 3aX - a - bX^2 - 2bX - b - cX - c - d = 0\\
&\iff -3aX^2 - 3aX - a - 2bX - b - c = 0\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} -3a &=& 0\\ -3a-2b &=& 0\\ a-b-c &=& 0\end{array}\right.\\
&\iff a = b = c = 0\\
&\iff P = d = d\cdot 1,
\end{aligned}$$

donc $E = \text{Vect}(1) = \mathbb{R}_0[X]$. Ainsi, on a une famille génératrice composée d'un seul vecteur (non nul) qui forme donc une base de E qui est alors de dimension 1 (il s'agit des polynômes constants).

(4) On y va! Pour la première, on peut faire de plusieurs façons, notamment en faisant intervenir les formules de somme des premiers entiers. Mais ce n'est pas nécessaire

$$\begin{aligned}
(i)\ \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i-j) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} i - \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} j\\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} i - \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} j\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pour la seconde, il est nécessaire de permuter - **avec vigilance** - l'ordre de sommation

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \le i \le n\\ 1 \le j \le i\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 1 \le j \le n\\ j \le i \le n\end{array}\right.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{i}{j+n} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{i}{j+n}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j+n}\sum_{i=j}^{n} i\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j+n}\frac{(j+n)(n-j+1)}{2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(n+1-j)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{1} k \qquad\qquad \text{(changement d'indice } k=n+1-j)\\
&= \frac{n(n+1)}{4}.
\end{aligned}$$

Pour les sommes doubles infinies, on admet le plus souvent la convergence, c'est le cas ici. Ce qui n'empêche pas de reconnaître des séries exponentielles.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{2^{i+j}}{i!j!} &= \left(\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{2^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{2^j}{j!}\right)\\
&= e^2\times e^2 = e^4.
\end{aligned}$$

Exercice 1

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixés, on pose

$$\Gamma_k = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) :\ A^k M = A^{k-1} M\}.$$

(1) (a) On montre que Γ_k est un espace vectoriel en montrant que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour ce faire, on suit les deux étapes du cours.

- <u>Γ_k est non vide</u>. En effet, notant 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$A^k \cdot 0_n = 0_n = A^{k_1} \cdot 0_n,$$

donc $0_n \in \Gamma_k$.

- <u>Γ_k est stable par combinaison linéaire</u>. Soient $M, N \in \Gamma_k$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$A^k\left(\lambda M + \mu N\right) = \lambda A^k M + \mu A^k N = \lambda A^{k-1} M + \mu A^{k-1} N = A^{k-1}(\lambda M + \mu N)$$

et $\lambda M + \mu N \in \Gamma_k$ qui est bien stable par combinaison linéaire.

Ainsi, Γ_k est un espace vectoriel.

(b) Soit $M \in \Gamma_k$. Ainsi, $A^k M = A^{k-1} M$. Mais alors,

$$A^{k+1} M = A \cdot A^k M = A \cdot A^{k-1} M = A^k M,$$

et $M \in \Gamma_{k+1}$. La matrice M étant choisie arbitraire dans Γ_k, on a bien l'inclusion $\Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}$.

(2) **Un cas particulier.** On suppose dans cette question uniquement que $n = 3$ et que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Pour cette question, on résout explicitement l'équation caractérisant l'appartenance à Γ_1.

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ a & b & c \end{pmatrix} \in \Gamma_1 \quad &\Longleftrightarrow \quad AM = M \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ a & b & c \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u & v & w \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ a & b & c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ a & b & c \end{pmatrix} \in \Gamma_1 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & u \\ u & = & a \\ a & = & 0 \\ y & = & v \\ v & = & b \\ b & = & 0 \\ z & = & w \\ w & = & c \\ c & = & 0 \end{array} \right. \iff M = 0_3.$$

Ainsi, on a bien $\Gamma_1 = \{0\}$.

(b) On procède de la même façon pour Γ_2.

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ a & b & c \end{pmatrix} \in \Gamma_2 &\iff A^2M = AM \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ a & b & c \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v & w \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En notant $(E_{i,j})$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a donc

$$\Gamma_2 = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}).$$

La famille de ces trois matrices est alors génératrice de Γ_2 et clairement libre (c'est une sous-famille d'une base donc une famille libre); c'est donc une base de Γ_2 qui est alors de dimension 2.

(c) C'est *quasiment* la même chose qu'à la question précédente. En remarquant que $A^3 = 0_3$,

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ a & b & c \end{pmatrix} \in \Gamma_3 &\iff A^3M = A^2M \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ a & b & c \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3 \\ &\iff M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = xE_{1,1} + yE_{1,2} + zE_{1,3} + uE_{2,1} + vE_{2,2} + wE_{2,3}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\Gamma_3 = \text{Vect}(E_{1,1}; E_{1,2}; E_{1,3}; E_{2,1}; E_{2,2}; E_{2,3})$$

et la famille génératrice obtenue est encore libre (pour la même raison que précédemment), c'est une base de Γ_3 qui est donc de dimension 6.

(3) **On revient au cas général.**

(a) On sait déjà qu'on a toujours $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$. Il suffit donc simplement de montrer l'inclusion réciproque. Soit $M \in \Gamma_2$. Montrons que $M \in \Gamma_1$.

$$A^2M = AM \Longrightarrow A^{-1} \cdot A^2M = A^{-1} \cdot AM \Longleftrightarrow AM = M \Longleftrightarrow M \in \Gamma_1.$$

On a bien la conclusion voulue.

(b) On s'intéresse à la réciproque. On suppose donc que $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

(i) Comme A n'est pas inversible, on a $\mathrm{Ker}(A) \neq \{0\}$. On peut donc trouver $X \in \mathrm{Ker}(A)$, $X \neq 0$, qui vérifie donc $AX = 0$.

(ii) Soit M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les colonnes sont identiques et égales à X. Chaque colonne de AM sera donc égale à AX donc à 0, donc $AM = 0$ donc $A^2M = 0 = AM$ et $M \in \Gamma_2$.

(iii) Comme $AM = 0 \neq M$, on a $M \notin \Gamma_1$ ce qui est impossible car $\Gamma_1 = \Gamma_2$ par hypothèse. Donc, nécessairement A est inversible et la réciproque est vraie.

(4) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_k = \dim(\Gamma_k)$.

(a) Comme $\Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}$, il suit que

$$u_k = \dim(\Gamma_k) \leq \dim(\Gamma_{k+1}) = u_{k+1},$$

et la suite est bien croissante.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma_k \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc

$$u_k = \dim(\Gamma_k) \leq \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2.$$

(c) Par convergence monotone, (u_k) converge vers une certaine limite ℓ, avec $\ell \in [0; n^2]$.

(d) La suite (u_k) est convergente. Mais c'est une suite d'entiers. Il est facile de voir qu'une suite d'entiers qui converge est stationnaire; à partir d'un moment, tous les termes sont égaux à la limite qui est elle-même un nombre entier (sinon on ne peut pas être arbitrairement proche de celle-ci). Le caractère stationnaire de la suite se traduit par l'existence d'un rang p à partir duquel tous les termes sont égaux, *i.e.*

$$\forall k \geq p, \qquad u_k = u_p.$$

En choisissant p comme le plus petit des entiers vérifiant cette propriété, on a aussi

$$\forall k < p,\ u_k < u_{k+1}.$$

Du lien entre dimension de sous-espaces vectoriels et inclusions, on en déduit que

$$\forall k < p,\ \Gamma_k \underset{\neq}{\subset} \Gamma_{k+1}, \quad \text{et} \quad \forall k \geq p,\ \Gamma_k = \Gamma_p.$$

Exercice 2 - D'après Oral HEC, 2018

(1) Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0, alors

$$f(u) = f(0) + f'(0)u + \frac{f''(0)}{2}u^2 + o(u^2), \qquad u \to 0.$$

(2) Soit $f :\ t \mapsto \ln(1+t) - t$.

(a) La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1;+\infty[$. Utilisant un DL en 0 de $t \mapsto \ln(1+t)$, on obtient

$$f(t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) - t = -\frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Il suit que

$$f(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^2}{2}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \to +\infty$. Comme $1/n \to 0$, on a

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}.$$

Donc

$$-f\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2}.$$

Or, la série de terme général $1/(2n^2)$ est le multiple du terme général d'une série de Riemann convergente donc, par critère d'équivalence la série $\sum -f(1/n)$ converge, puis on en déduit que $\sum f(1/n)$ converge.

(3) On considère un nombre réel $a > 0$ et une suite à termes strictement positifs $(u_n)_{n\geq 1}$. On introduit alors les suites (w_n) et (ℓ_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$w_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{a}{n}, \qquad \ell_n = \ln(n^a u_n).$$

On **suppose** que la série de terme général w_n est absolument convergente.

(a) Si la série de terme général $|w_n|$ converge, alors son terme général tend vers 0 et en particulier, est plus petit que 1 à partir d'un certain rang. Il suit que, toujours à partir de ce rang,

$$0 \leq w_n^2 \leq |w_n|$$

et par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum w_n^2$ converge. De plus, pour $n \geq 1$,

$$0 \leq \left|\frac{w_n}{n}\right| \leq |w_n|$$

et, encore par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum w_n/n$ converge absolument donc converge (simplement).

(b) C'est un (simple) calcul à vérifier, en remarquant que $\ln(t+1) = f(t) + t$.

$$\begin{aligned}
\ell_{n+1} - \ell_n &= \ln((n+1)^a u_{n+1}) - \ln(n^a u_n) \\
&= a\ln(n+1) + \ln(u_{n+1}) - a\ln(n) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) + a\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + 1\right) + a\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= f\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right) + \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + af\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{a}{n} \\
&= f\left(w_n - \frac{a}{n}\right) + w_n + af\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(c) Comme la série $\sum w_n$ est absolument convergente, alors $|w_n|$ tend vers 0 et il en est de même (par application immédiate du théorème des gendarmes) de w_n. Comme a/n tend aussi vers 0, il suit que

$$\lim_{n\to+\infty} w_n - \frac{a}{n} = 0.$$

On peut donc utiliser l'équivalent de f en 0.

$$f\left(w_n - \frac{a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\left(w_n - \frac{a}{n}\right)^2 = -\frac{w_n^2}{2} + a\frac{w_n}{n} - \frac{a^2}{2n^2}.$$

On reconnait la combinaison de termes généraux trois séries convergentes (d'après la question ($3a$) ainsi qu'une série de Riemann). Par critère d'équivalence (adapté pour les séries à termes négatifs comme ci-dessus), on peut conclure que la série $\sum f(w_n - a/n)$ converge.

(d) D'après ($3a$) et ($2b$), $\ell_{n+1} - \ell_n$) est combinaison de trois termes généraux de séries convergentes donc la série $\sum(\ell_{n+1} - \ell_n)$ converge.

(e) C'est le fameux lien entre suite et série "télescopique". On constate que

$$\sum_{k=1}^{n-1}(\ell_{k+1} - \ell_k) = \ell_n - \ell_1 \iff \ell_n = \ell_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(\ell_{k+1} - \ell_k).$$

Ainsi, la suite (ℓ_n) converge. On peut même dire que

$$\lim_{n\to+\infty} \ell_n = \ell_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(\ell_{n+1} - \ell_n) = C.$$

(f) On rappelle que $\ell_n = \ln(n^a u_n) \iff u_n = e^{\ell_n}/n^a$. Ainsi, la dernière question donne, en posant $A = \exp(C)$,

$$n^a u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A \iff \frac{n^a}{A} \cdot u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

ou encore

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A}{n^a}.$$

(4) Application. On considère la suite (u_n) définie, pour $n \geq 1$ par

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}.$$

(a) Par définition

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2}{3} \\ u_2 &= \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \\ u_3 &= \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} = \frac{48}{105}. \end{aligned}$$

(b) Comme le suggère le mot *Application*, on va essayer d'appliquer le critère de convergence démontré précédemment. Commençons par calculer

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k}{2k+1} \times \prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k} \\ &= \frac{2n+2}{2n+3} \\ &= 1 - \frac{1}{2n+3} \end{aligned}$$

En particulier, on voit qu'en posant

$$w_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+3} = \frac{3}{2n(2n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{4n^2}$$

on a définit une série $\sum w_n$ (absolument) convergente. En appliquant la conclusion de la question (3) - avec $a = 1/2$ donc - il suit qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A}{\sqrt{n}}.$$

Il suit, par critère d'équivalence, que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 3 - D'après EDHEC 2004

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la formule ci-dessous et C_n sa courbe représentative.

$$f_n = \begin{cases} xe^{-n/x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Partie 1 - Étude des fonctions f_n

(1) Lorsque $x \to 0^+$, $n/x \to +\infty$, donc $-n/x \to -\infty$ et l'exponentielle du tout tend vers 0. Ainsi, $f_n(x) \to 0 = f_n(0)$ et f_n est bien continue à droite en 0.

(2) Il faut calculer la limite (à droite) du taux d'accroissement

$$\begin{aligned} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} &= \frac{xe^{-n/x}}{x} = e^{-n/x} \\ &\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Ainsi, f_n est bien dérivable à droite en 0 et $(f_n)'_d(0) = 0$.

(3) La fonction f_n n'est pas continue à gauche (sa limite lorsque $x \to 0^-$ vaut $-\infty$), elle n'est en particulier pas dérivable et la courbe c_n présente une asymptote verticale à gauche en 0.

(4) La fonction $x \mapsto -n/x$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Par composition avec l'exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$ et produit avec $x \mapsto x$ ayant la même propriété, f_n est bien dérivable sur chacun des deux intervalles précédents. De plus,pour tout réel x non nul, on a

$$f_n'(x) = e^{-n/x} + x \times \left(\frac{n}{x^2}\right) e^{-n/x} = \frac{x+n}{x} e^{-n/x},$$

expression dont il est facile d'obtenir le signe

x	$-\infty$		$-n$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

(5) Comme $e^{-n/x} \to 1$, $x \to \pm\infty$, il est clair que $f_n(x) \to \pm\infty$, $x \to \pm\infty$ par algèbre des limites. On a déjà dit que $f_n(x) \to -\infty$, $x \to 0^-$ (par croissance comparée). Le signe de la dérivée ci-dessus nous permet de dresser le tableau de variations

x	$-\infty$		$-n$		0		$+\infty$
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$-ne$	$\searrow$	$-\infty \Vert 0$	$\nearrow$	$+\infty$

(6) On rappelle le développement limité à l'ordre 2 de $\exp(u)$ au voisinage de $u = 0$

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

(a) Le DL rappelé ci dessus permet d'écrire (car $-x/n \to 0$, $x \to \pm\infty$) que, pour $x \to \pm\infty$,

$$e^{-n/x} = 1 - \frac{n}{x} + \frac{n^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

En multipliant par x on obtient bien

$$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

(b) Il est alors clair, par la question précédente, que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) - (x-n) = 0,$$

ce qui se traduit par le fait que C_n admet une asymptote oblique D_n d'équation $y = x - n$ en $\pm\infty$. Comme $f_n(x) - (x-n) = n^2/2x + o(1/x)$, on peut déterminer le signe de la différence et la position de C_n par rapport à D_n: quand $x \to +\infty$, $n^2/2x > 0$ donc C_n est au dessus de D_n. Lorsque $x \to -\infty$, $n^2/2x < 0$ et C_n est au dessous de D_n.

Partie 2 - Un équivalent d'une suite implicite

(7) D'après l'étude précédente, pour tout $x < 0$, $f_n(x) < 0$ donc une solution à l'équation $f_n(x) = 1$ ne peut être que positive. On applique alors le théorème de bijection: f_n est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Comme $1 \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = 1$ admet donc une unique solution u_n (ou encore 1 admet un unique antécédent u_n dans $\mathbb{R}_+$ par f_n).

(8) On voit que $f_n(1) = e^{-n} < 1 = f_n(u_n)$. Par stricte croissance de f_n, il suit que $u_n > 1$. De plus, en passant au logarithme

$$\begin{aligned} f_n(u_n) = 1 &\iff u_n \exp(-n/u_n) = 1 \\ &\iff \ln(u_n) - n/u_n = 0 \iff u_n \ln(u_n) - n = 0 \\ &\iff u_n \ln(u_n) = n \\ &\iff u_n \text{ solution de } (E_n) \end{aligned}$$

(9) La fonction g est définie, (continue et) dérivable sur $[1;+\infty[$ comme produit de fonctions usuelles dérivables. On a, pour $x \geq 1$, $g'(x) = \ln(x) + 1 > 0$. Donc g est strictement croissante. Par le théorème de bijection, elle en réalise une de $[1;+\infty[$ sur $[g(1); \lim_{+\infty} g[= [0;+\infty[$. Par le même théorème, la bijection réciproque g^{-1} suit les mêmes variations que g et est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus

$$u_n \text{ solution de } E_n \iff g(u_n) = n \iff u_n = g^{-1}(n).$$

Par continuité de g^{-1} sur $\mathbb{R}_+$ et comme $g(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} g^{-1}(n) = +\infty.$$

(10) On sait que $u_n \ln(u_n) = n$. Or, comme $u_n > 1$, $\ln(u_n) > 0$ et, en prenant le logarithme de cette quantité, on obtient

$$\ln(u_n \ln(u_n)) = \ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n).$$

Il suit que

$$\ln(u_n)\left(1 + \frac{\ln(\ln(u_n))}{\ln(u_n)}\right) = \ln(n)$$

ou encore
$$\frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} = \frac{1}{1 + \frac{\ln(\ln(u_n))}{\ln(u_n)}}.$$
Mais, comme, par croissance comparée
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$
et que $\ln(u_n) \to +\infty$, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln(u_n))}{\ln(u_n)} = 0$$
et il suit que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} = 1.$$

(11) On revient à la définition de u_n
$$\begin{aligned} u_n \ln(u_n) = n &\iff u_n = \frac{n}{\ln(u_n)} \\ &\iff u_n \times \frac{\ln(n)}{n} = \frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} \end{aligned}$$
or, on a vu que le membre de droite tendait vers 1, $n \to +\infty$, à la question précédente, ce qui permet d'écrire que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n \times \frac{\ln(n)}{n} = 1,$$
ou encore
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}.$$

Problème - D'après EML 2017

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.

On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note :

B_k l'événement : "on obtient une boule bleue au k-ième tirage"
R_k l'événement : "on obtient une boule rouge au k-ième tirage"

Partie I : Simulation informatique

(1) Si r et b désignent les nombres de boules rouges et blanches dans l'urne lors du k-ième tirage , la probabilité de tirer une boule rouge lors de ce tirage est $P(R_k) = \frac{r}{r+b}$ et l'évènement "$rand() <= \frac{r}{r+b}$" est réalisé avec cette même probabilité.

```
function s=EML(n)
    b=1 // b désigne le nombre de boules bleues présentes dans l'urne
    r=2 // r désigne le nombre de boules rouges présentes dans l'urne
    s=0 // s désigne le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages
```

```
    for k=1:n
        x=rand()
        if x<=r/(r+b) then  //si la boule tirée est rouge
            r=r+1,s=s+1  // on augmente alors les nombres de rouges tirées et
dans l'urne
        else
            b=b+1 // on augmente seulement le nombre de boules bleues dans l'
urne
        end
    end
endfunction
```

(2) On exécute le programme suivant :

```
n=10
m=0
for i=1:1000
    m=m+DM3(n)
end
disp(m/1000)
```

On répète ici 1000 fois l'expérience de 10 tirages, `m` compte le nombre total de boules rouges obtenues et `m/1000` le nombre moyen de boules rouges obtenues lors de 10 tirages. (ce qui sera noté $E(S_{10})$ dans la suite du problème.
On peut penser que $E(S_{10}) \approx 6.66$.

Partie II : Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

(3) (a) Tout d'abord, comme il y remise de boules dans l'urne, il est clair que Y peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{N}^*$. Et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
P([Y=n]) &= P(R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1} \cap B_n) \\
&= P(R_1)P_{R_1}(R_2)\cdots P_{\bigcap_{1\le i\le n-2} R_i}(R_{n-1})P_{\bigcap_{1\le i\le n-1} R_i}(B_n) \\
&= \frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{4}{5}\cdots\frac{2+(n-2)}{3+(n-2)}.\frac{1}{3+(n-1)} \\
&= \frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{4}{5}\cdots\frac{n}{n+1}.\frac{1}{n+2} \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}$$

En justifiant que:

- pour la deuxième égalité, les évènements n'étant pas indépendants (tirages sans remise), on utilise la f**ormule des probabilités composées**.
- pour tout $k \in [\![1;n-1]\!]$, on calcule $P_{R_1\cap\ldots\cap R_{n-1}\cap Rk-1}(R_k)$ en faisant le quotient du nombre de boules rouges dans l'urne $(2+(k-1))$ par le nombre total de boules dans l'urne $(3+(k-1))$.

(b) Comme
$$nP\left([Y=n]\right) = \frac{2n}{(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n},$$
la série de terme général $nP\left([Y=n]\right)$ est (positive et) de même nature (par critère d'équivalence) que la série harmonique et donc divergente. Il suit que variable aléatoire Y n'admet pas d' espérance et donc pas de variance non plus.

Partie III : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

On définit, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si on obtient une boule rouge au k-ième tirage et égale à 0 sinon.

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges au cours des n premiers tirages.

(4) De façon classique, X_k étant le nombre de boules rouges tirées (0 ou 1) au k-ième tirage et S_n le nombre total de boules rouges tirées au cours des n premiers tirages, on a
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

(5) La variable aléatoire X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(X_1 = 1) = P(R_1) = 2/3$. D'après le cours, son espérance est donc $E(X_1) = 2/3$ et sa variance $V(X_1) = (2/3)(1/3) = 2/9$.

(6) (a) On a
$$\begin{aligned}
P\left((X_1, X_2) = (0,0)\right) &= P\left(B_1 \cap B_2\right) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{6} \\
\\
P\left((X_1, X_2) = (0,1)\right) &= P\left(B_1 \cap R_2\right) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{6} \\
\\
P\left((X_1, X_2) = (1,0)\right) &= P\left(R_1 \cap B_2\right) \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \\
\\
P\left((X_1, X_2) = (1,1)\right) &= P\left(R_1 \cap R_2\right) \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(b) On utilise la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{(X_1 = 0), (X_1 = 1)\}$ et les probabilités ci-dessus
$$\begin{aligned}
P(X_2 = 0) &= P(X_2 = 0 \cap X_1 = 0) + P(X_2 = 0 \cap X_1 = 1) \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \\
\\
P(X_2 = 1) &= P(X_2 = 1 \cap X_1 = 0) + P(X_2 = 1 \cap X_1 = 1) \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

On constate notamment - ce qui n'était pas clair *a priori* - que $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(1, 2/3)$, tout comme X_1.

(7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0; n]\!]$.

(a) Comme précédemment, en utilisant la formule des probabilités composées:

$$\begin{aligned} P\left(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n\right) &= \frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{4}{5}\cdots\frac{2+(k-1)}{3+(k-1)}\frac{1}{3+k}\frac{2}{4+k}\cdots\frac{1+(n-1-k)}{3+(n-1)} \\ &= \frac{2}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{4}{5}\cdots\frac{2+(k-1)}{3+(k-1)}\frac{1}{3+k}\frac{2}{4+k}\cdots\frac{1+(n-1-k)}{3+(n-1)} \\ &= \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} \end{aligned}$$

(b) L'événement $(S_n = k)$ se réalise lorsque sur n tirages, il apparait k boules rouges et $n-k$ boules blanches, dans un ordre indéterminé.

- Pour calculer la probabilité d'avoir k boules rouges et $n-k$ boules blanches dans un ordre déterminé, on ferait un calcul analogue au précédent pour obtenir finalement le même résultat qu'au (a) (car le dénominateur est déterminé par les nombres successifs de boules dans l'urne et le numérateur correspond au nombre de boules blanches ou rouge au cours des n tirages : ce sont les mêmes qu'au (a) dans un ordre différent),on a donc finalement

$$P\left(k \text{ rouges et } n-k \text{ boules blanches, dans un ordre déterminé}\right) = \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!}$$

- $(S_n = k)$ est donc la réunion disjointe d'événements incompatibles de même probabilité. Chacun de ces événements correspondant à l'apparition de k boules rouges et des $n-k$ boules blanches dans chacun des ordres possibles, il y en a donc autant que de manières de placer k boules rouges parmi n places possibles, c'est à dire $\binom{n}{k}$.

- Finalement

$$([S_n = k]) = \binom{n}{k} P\left(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n\right)$$

et donc

$$P\left([S_n = k]\right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}.$$

(8) Comme $S_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$, la variable S_n est finie et admet donc une espérance. De plus,

$$\begin{aligned} E(S_n) &= \sum_{k=0}^{n} kP(S_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2k(k+1)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{2}{(n+1)(n+2)}\left(\sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k\right) \\ &= \frac{2}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= \frac{n(2n+1)+3n}{3(n+2)} = \frac{2n(n+2)}{3(n+2)} \\ &= \frac{2n}{3}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la valeur attendue.

(9) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) $P_{[S_n=k]}([X_{n+1}=1])$ est la probabilité de tirer au $n+1$-ième tirage une boule rouge dans une urne qui, après n tirages ayant amené k rouges, contient $n+3$ boules dont $2+k$ sont rouges. On a donc bien

$$P_{[S_n=k]}([X_{n+1}=1]) = \frac{k+2}{n+3}.$$

(b) La formule des probabilités totales associée au s.c.e. $\{[S_n=k] : k \in [\![0;n]\!]\}$ fournit

$$\begin{aligned}
P([X_{n+1}=1]) &= \sum_{k=0}^{n} P_{[S_n=k]}([X_{n+1}=1])\, P([S_n=k]) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k+2}{n+3} P([S_n=k]) \\
&= \frac{1}{n+3}\left(\sum_{k=0}^{n} kP([S_n=k]) + \sum_{k=0}^{n} 2P([S_n=k])\right) \\
&= \frac{1}{n+3}(E(S_n)+2) \qquad (\text{car } \sum_{k=0}^{n} P([S_n=k]) = 1) \\
&= \frac{E(S_n)+2}{n+3}.
\end{aligned}$$

(c) Comme $E(S_n) = 2n/3$, on obtient

$$P(X_{n+1}=1) = \frac{2}{3}$$

ce qui permet d'en déduire $P(X_{n+1}=0) = 1-2/3 = 1/3$. Donc $X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(1, 2/3)$. Ainsi, chacune des variables X_i suit la même loi de Bernoulli. (*En revanche, elles ne sont pas indépendantes.*)

Partie IV : Étude d'une fonction de répartition et de sa limite

On s'intéresse dans cette partie à la proportion de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = S_n/n$.

(10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$ donc $T_n(\Omega) = \left\{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\} \subset [0;1]$. Ainsi,

$$\forall x < 0, \quad P([T_n \leqslant x]) = 0, \quad \text{et} \quad \forall x > 1, \quad P([T_n \leqslant x]) = 1.$$

(11) Soit $x \in [0;1]$ et soit n de $\mathbb{N}^*$

$$P([T_n \leqslant x]) = P([S_n \leqslant nx]) = \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} P([S_n=k]) = \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$$

d'après le résultat de la Question (7*b*) de la Partie III. Ainsi,

$$P([T_n \leqslant x]) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor}(k+1) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{j=1}^{\lfloor nx \rfloor + 1} j$$

obtenu par changement d'indice $j = k+1$. Or,

$$\sum_{j=1}^{m} j = \frac{m(m+1)}{2}$$

donc, avec $m = \lfloor nx \rfloor + 1$ on obtient

$$P([T_n \leqslant x]) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{2}$$

Et on peut conclure que, pour $x \in [0;1]$,

$$P([T_n \leqslant x]) = \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)}.$$

(12) Commençons par remarquer que

$$\frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)}{(n+1)} \frac{(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+2)}.$$

Or,

$$\frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)}{(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}.$$

Et pour tout $x \in [0;1]$,

$$nx - 1 \leqslant \lfloor nx \rfloor \leqslant nx \Rightarrow x - \frac{1}{n} \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x.$$

Ainsi, d'après le théorème de l'encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)}{(n+1)} = x.$$

De même,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+2)} = x.$$

Au final,

$$\lim_{n \to +\infty} P([T_n \leqslant x]) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2, & \text{si} \quad x \in [0;1] \\ 1, & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$