ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir Maison n°4

À rendre le 26/11

Exercice 1

Un lecteur multimédia est enclenché en mode *aléatoire* et joue N morceaux de musique (numérotés de 1 à N) selon le procédé suivant:

- On admet que le numéro du morceau joué à l'instant n est une variable aléatoire notée X_n;
- À l'instant $n=0$, le lecteur joue le morceau numéro 1 (ainsi $X_0=1$);
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le lecteur choisit au moment $n+1$, de manière **équiprobable**, un morceau différent de celui joué au moment n parmi tous les morceaux possibles.

(1) Quelle est la loi de X_1? En déduire son espérance et sa variance.
(2) Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \geq 2$, $X_n(\Omega) = [\![1;N]\!]$.
(3) Déterminer la loi de X_2.
(4) Déterminer, pour tout $n \geq 2$ et tout couple $(i,j) \in [\![1;N]\!]^2$, $P_{X_n=i}(X_{n+1}=j)$.
(5) On pose alors, pour $n \geq 2$,
$$u_n = P(X_n = 1)$$
 (a) Montrer que, pour tout $n \geq 2$,
$$u_{n+1} = \frac{1}{N-1}(1-u_n).$$
 (b) En reconnaissant une suite arithmético-géométrique, en déduire alors que, pour tout $n \geq 2$,
$$P(X_n=1) = \frac{1}{N}\left(1-\left(-\frac{1}{N-1}\right)^{n-1}\right).$$
(6) On note Y le premier instant où le lecteur rejoue le morceau numéroté 1.
 (a) Justifier que $Y(\Omega) = [\![2;+\infty[\![$, puis déterminer $P(Y=2)$.
 (b) Pour tout $n \geq 3$, exprimer l'évènement $(Y=n)$ à l'aide des variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$.
 (c) En déduire, à l'aide de la formule des probabilités composées, que, pour tout $n \geq 3$,
$$P(Y=n) = \frac{1}{N-1}\left(1-\frac{1}{N-1}\right)^{n-2}.$$
 (d) Montrer que $Y-1$ admet une espérance et la calculer. En déduire $E(Y)$.

Exercice 2

On considère une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, où $p \in]0;1[$. On note $q = 1-p$.

(1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Rappeler en justifiant le lien entre $P(X = k)$, $P(X \geq k)$ et $P(X \geq k+1)$.

(2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$P(X \geq k) = q^{k-1}.$$

(3) On considère alors deux variables aléatoires X, Y indépendantes de même loi $\mathcal{G}(p)$ et on pose
$$Z = \min(X, Y).$$

(a) Déterminer $Z(\Omega)$.

(b) En observant que $P(Z \geq k) = P(X \geq k \cap Y \geq k)$, déterminer, pour tout $k \in Z(\Omega)$,
$$P(Z \geq k).$$

(c) Montrer alors que Z suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

(d) En déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.

(4) On introduit maintenant la variable $T = \max(X, Y)$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

(a) Justifier l'égalité
$$[Z = k] \cup [T = k] = [X = k] \cup [Y = k]$$

(b) En déduire que
$$P(T = k) = 2P(X = k) - P(Z = k).$$

(c) Conclure que T admet une espérance et que
$$V(T) = \frac{q(2q^2 + q + 2)}{(1-q^2)^2}.$$

(5) En calculant de deux façons $V(Z + T)$, déterminer $\text{cov}(Z, T)$. Les variables Z et T sont-elles indépendantes?

Exercice 3

(1) Justifier de la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} \mathrm{d}t$.

(2) À l'aide du changement de variable $u = 1/t$, montrer que $I = 0$.

Exercice 4

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t.$$

(1) Montrer que la suite (I_n) est bien définie et décroissante.

(2) Montrer que, pour tout $u \in [0;1]$

$$0 \leq 1 - u \leq e^{-u}.$$

(3) Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

(4) En déduire, à l'aide du changement de variables $x = \sqrt{n}u$ que

$$I_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

(5) En déduire la limite de (I_n).

(6) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout $n \geq 1$,

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

(7) En déduire, par récurrence, que

$$I_n = \frac{\left(2^n n!\right)^2}{(2n+1)!}.$$