ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°4

Solution

Exercice 1

Un lecteur multimédia est enclenché en mode *aléatoire* et joue N morceaux de musique (numérotés de 1 à N) selon le procédé suivant:

- On admet que le numéro du morceau joué à l'instant n est une variable aléatoire notée X_n;
- À l'instant $n = 0$, le lecteur joue le morceau numéro 1 (ainsi $X_0 = 1$);
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le lecteur choisit au moment $n+1$, de manière **équiprobable**, un morceau différent de celui joué au moment n parmi tous les morceaux possibles.

(1) Au moment $n = 1$, on joue un morceau choisi au hasard entre les numéros 2 et N. Il est alors clair que
$$X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![2; N]\!]).$$
Par les formules du cours, on obtient
$$E(X_1) = \frac{2+N}{2}, \qquad V(X_1) = \frac{(N-2+1-1)^2-1}{12} = \frac{(N-3)(N-1)}{12}.$$

(2) Soit $n \geq 2$. Cette question est beaucoup plus délicate qu'il n'y parait. Bien sûr, il est clair qu'on a l'inclusion
$$X_n(\Omega) \subset [\![1; N]\!].$$
Mais pour montrer l'égalité, il faut montrer que
$$\forall k \in [\![1; N]\!], \qquad P(X_n = k) > 0.$$
En général, on ne demande pas explicitement de prouver l'inclusion inverse, sauf par exemple dans le sujet **EDHEC 2017**. Ainsi, on propose ici une démonstration instructive de ce type de question, et on procède par récurrence. L'étudiant.e déjà en difficulté pourra reprendre cette question relativement subtile un peu plus tard.

- initialisation. Pour $n = 2$, on a, pour $k \in [\![2; N]\!]$, on a, par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{(X_1 = j) : j[\![2; N]\!]\}$,
$$\begin{aligned} P(X_2 = k) &= P_{X_1=k}(X_2 = k)P(X_1 = k) + P_{X_1 \neq k}(X_2 = k)P(X_1 \neq k) \\ &= 0 + \frac{N-2}{N-1} \times \frac{1}{N-1} > 0 \end{aligned}$$

Pour $k=1$, comme le morceau 1 n'est pas joué au moment $n=1$, on a

$$P(X_2=1)=\frac{1}{N-1}>0.$$

Dans tous les cas, on a bien $P(X_2=k)>0$ et la propriété est bien vérifiée pour $n=2$.

- <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain $n\geq 2$, on ait $X_n(\Omega)=[\![1;N]\!]$. Soit $k\in[\![;N]\!]$. Encore par la formule des probabilités totales, appliquée au s.c.e (et l'hypothèse de récurrence apparaît déjà là) $\{(X_n=j):\ j\in[\![1;N]\!]\}$, on a

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=k) &= P_{X_n=k}(X_{N+1}=k)P(X_n=k)+P_{X_n\neq k}(X_{n+1}=k)P(X_n\neq k) \\ &= 0+\frac{1}{N-1}\times P(X_n\neq k)>0 \end{aligned}$$

car, par (HR), $P(X_n\neq k)\neq 0$ (sinon $X_n(\Omega)=\{k\}$, ce qui n'est pas vrai). La récurrence est bien terminée.

(3) D'après l'énonce, il est clair que, pour tout $n\geq 2$,

$$\forall(i,j)\in[\![1;N]\!]^2,\qquad P_{X_n=i}(X_{n+1}=j)=\begin{cases} 0, & \text{si } i=j \\ \dfrac{1}{N-1}, & \text{si } i\neq j \end{cases}$$

(4) On sait déjà que $X_2(\Omega)=[\![1;N]\!]$. Le cas $(X_2=1)$ est à traiter à part. En effet,

$$P(X_2=1)=P([X_2=1]\cap[X_1\neq 1])=P_{X_1\neq 1}(X_2=1)P(X_1\neq 1)=\frac{1}{N-1}.$$

En revanche, si $k\geq 2$, par la FTP, on a

$$\begin{aligned} P(X_2=k) &= \sum_{j=2}^{N}P_{X_1=j}(X_2=k)P(X_1=j)=\sum_{\substack{j=2\\ j\neq k}}^{N}P_{X_1=j}(X_2=k)P(X_1=j) \\ &= \sum_{\substack{j=2\\ j\neq k}}^{N}\frac{1}{N-1}\times\frac{1}{N-1} \\ &= \frac{N-2}{(N-1)^2}. \end{aligned}$$

On observe bien que

$$\frac{1}{N-1}+\sum_{k=2}^{N}\frac{N-2}{(N-1)^2}=\frac{1+N-2}{N-1}=1.$$

Ce n'est pas une loi usuelle.

(5) On pose donc, pour $n\geq 2$,

$$u_n=P(X_n=1).$$

On a alors

$$u_2=\frac{1}{N-1}$$

d'après la question précédente.

(a) D'après la FPT, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= P(X_{n+1}=1) = P_{(X_n\neq 1)}(X_{n+1}=1)P(X_n\neq 1) + P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)P(X_n=1) \\ &= \frac{1}{N-1}\left(1-P(X_n=1)\right) + 0\times P(X_n=1) \\ &= \frac{1}{N-1}(1-u_n) \\ &= -\frac{u_n}{N-1}+\frac{1}{N-1} \end{aligned}$$

(b) On a alors reconnu une suite arithmético-géométrique. On suit le protocole du cours, en commençant par chercher ℓ tel que

$$\ell = -\frac{\ell}{N-1}+\frac{1}{N-1} \iff \ell = \frac{1}{N}.$$

Ensuite, la suite $(u_n-\ell)$ est géométrique de premier terme $u_2-\ell$ et de raison $-1/(N-1)$. On obtient donc

$$u_n = \left(-\frac{1}{N-1}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N}\right)+\frac{1}{N} = \frac{1}{N}\left(1-\left(-\frac{1}{N-1}\right)^{n-1}\right).$$

On remarque par contre que la formule ne s'étend pas à $n=1$.

(6) On note Y le premier instant où le lecteur rejoue le morceau numéroté 1.

(a) Le morceau 1 ne peut pas être rejoué à l'instant $n=1$ mais peut l'être à partir de $n=2$. Ainsi, Y prend bien ses valeurs dans $[\![2;+\infty[\![$. De plus, par définition

$$P(Y=2)=P(X_2=1)=\frac{1}{N-1}.$$

(b) Pour $n\geq 3$, il est clair que

$$\begin{aligned} (Y=n) &= \left([X_1\neq 1]\bigcap[X_2\neq 1]\bigcap\cdots\bigcap[X_{n-1}\neq 1]\bigcap[X_n=1]\right) \\ &= \left(\bigcap_{k=2}^{n-1}[X_k\neq 1]\right)\cap[X_n=1] \end{aligned}$$

car l'évènement $[X_1\neq 1]$ est certain.

(c) En observant que

$$P_{\bigcap_{j=2}^{k}[X_j\neq 1]}(X_{k+1}\neq 1) = P_{[X_k\neq 1]}(X_{k+1}\neq 1) = \frac{N-2}{N-1},$$

la formule des probabilités composées donne, pour $n\geq 3$,

$$\begin{aligned} P(Y=n) &= P(X_2\neq 1)P_{[X_2\neq 1]}(X_3\neq 1)\cdots P_{\bigcap_{k=2}^{n-1}[X_k\neq 1]}(X_n=1) \\ &= \left(1-\frac{1}{N-1}\right)\times\left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{n-3}\times\frac{1}{N-1} \\ &= \left(\frac{1}{N-1}\right)\left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{n-2} \end{aligned}$$

$$P(Y=n)=\frac{1}{N-1}\left(1-\frac{1}{N-1}\right)^{n-2}.$$

On constate que la formule trouvée pour $n\geq 3$ est aussi valable pour $n=2$.

(d) Par le théorème de transfert, $Y-1$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général $(n-1)P(Y=n)$ converge (absolument). Ici tout est positif donc pas besoin de valeur absolue. On observe que, pour $n \geq 2$,

$$(n-1)P(Y=n) = \frac{1}{N-1} \times (n-1)\left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{n-2}$$

et on reconnait le multiple du terme général de la série géométrique dérivée (décalée) de raison $(N-2)/(N-1)$ (avec $|(N-2)/(N-1)| < 1$) donc convergente. Ainsi, $Y-1$ admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(Y-1) &= \frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)\left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{n-2} \\ &= \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{+\infty} j\left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{j-1} \\ &= \frac{1}{N-1} \times \frac{1}{(1-\frac{N-2}{N-1})^2} \\ &= N-1. \end{aligned}$$

Il suit, comme $Y = Y-1+1$ que Y admet une espérance et par linéarité de celle-ci,

$$E(Y) = E(Y-1)+1 = N.$$

On pouvait aussi faire plus simple (voir *Remarque 2*).

Remarque 1. On ne résiste pas à l'envie de proposer un programme `SciLab` permettant de simuler Y, à méditer...

```
function y=Y(N)
    X=grand(1,1,'uin',2, N) // morceau joué au moment 1
    y=2;
    while X<> 1
        U=[1:N]; //liste des morceaux disponibles
        y=y+1;
        for k=X:N-1
            U(k)=U(k+1); // X n'est plus dans les morceaux disponibles
        end
        X=U(grand(1,1, 'uin',1, N-1));
    end
endfunction
```

Remarque 2. On peut en fait voir que $Y-1$ suit une loi géométrique de paramètre $1/(N-1)$. Cela donne tout de suite $E(Y-1) = N-1$. Et cela permettrait de simplifier le programme précédent, mais c'est nettement moins rigolo....

```
function y=Y(N)
   Y=grand(1,1, 'geom', 1/(N-1)) +1
endfunction
```

Exercice 2

Cet exercice est adapté du sujet **HEC 2015**.

On considère une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, où $p \in]0;1[$. On note $q = 1-p$.

(1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Il est clair que

$$[X \geq k] = [X = k] \cup [X \geq k+1]$$

et l'union est disjointe. Ainsi,

$$P(X \geq k) = P(X = k) + P(X \geq k+1) \Longleftrightarrow P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1).$$

(2) On fait le calcul

$$\begin{aligned} P(X \geq k) &= 1 - P(X < k) = 1 - P(\leq k-1) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^{k-1} P(X = j) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^{k-1} pq^{j-1} \\ &= 1 - p\frac{1-q^{k-1}}{1-q} \\ &= q^{k-1}, \qquad \text{car } 1-q = p. \end{aligned}$$

(3) On considère alors deux variables aléatoires X, Y indépendantes de même loi $\mathcal{G}(p)$ et on pose

$$Z = \min(X, Y).$$

(a) Les deux variables X et Y prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$, le minimum des deux peut alors prendre également n'importe dans $\mathbb{N}^*$ donc $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

(b) On observe que $P(Z \geq k) = P(X \geq k \cap Y \geq k)$. C'est une égalité très très utilise que l'on utilisera à de nombreuses reprises. Si le résultat est intuitif et qu'il est plus ou moins officiellement admis, il faudrait le démontrer mais cela alourdirait la rédaction et on ne le demande donc pas (et *a priori* les sujets de concours non plus). Ainsi,

$$\begin{aligned} P(Z \geq k) &= P(X \geq k \cap Y \geq k) \\ &= P(X \geq k)P(Y \geq k) \qquad \text{(par indépendance de } X \text{et } Y) \\ &= P(X \geq k)^2 \qquad \text{(car } x \text{ et } Y \text{ suivent la même loi (géométrique))} \\ &= q^{2(k-1)}, \end{aligned}$$

en utilisant le résultat de la question précédente.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(X \geq k) - P(X \geq k+1) \\ &= q^{2(k-1)} - q^{2k} \\ &= \left(q^2\right)^{k-1}\left(1 - q^2\right) \end{aligned}$$

et on reconnait la formule d'une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $(1-q^2)$

$$Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1-q^2\right).$$

(d) On en déduit, par les formules du cours

$$E(Z) = \frac{1}{1-q^2}, \qquad V(Z) = \frac{q^2}{(1-q^2)^2}.$$

(4) On introduit maintenant la variable $T = \max(X, Y)$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

(a) Si $\omega \in [Z = k] \cup [T = k]$ cela veut dire que le minimum ou que le maximum de X et Y est k, donc la valeur k est prise par (au moins) l'une des deux variables X ou Y, donc $\omega \in [X = k] \cup [Y = k]$ et $[Z = k] \cup [T = k] \subset [X = k] \cup [Y = k]$. Réciproquement, si $\omega \in [X = k] \cup [Y = k]$, alors au moins l'une des deux variables vaut k et nécessairement le maximum ou le minimum (ou les deux) de X et Y vaut k. Ainsi, $\omega \in [Z = k] \cup [T = k]$ et on a l'inclusion réciproque et donc l'égalité

$$[Z = k] \cup [T = k] = [X = k] \cup [Y = k].$$

(b) Il suit que, par la formule du crible,

$$\begin{aligned} P(Z = k) + P(T = k) - P(Z = k \cap T = k) &= P([X = k] \cup [Y = k]) \\ &= P(X = k) + P(Y = k) - P([X = k] \cap [Y = k]). \end{aligned}$$

Observant que

$$P([Z = k] \cap [T = k]) = P([X = k] \cap [Y = k]),$$

il suit que

$$\begin{aligned} P(T = k) &= P(X = k) + P(Y = k) - P([X = k] \cap [Y = k]) - P(T = k) + P(Z = k \cap T = k) \\ &= P(X = k) + P(Y = k) - P(Z = k) \\ &= 2P(X = k) - P(Z = k) \qquad \text{(car } X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi)} \end{aligned}$$

ce qui est bien ce qu'on voulait.

(c) La question précédente permet de voir que Z possède un moment d'ordre 2. En effet,

$$k^2 P(T = k) = 2k^2 P(X = k) - k^2 P(Z = k).$$

Comme X et Z admettent tous les deux des moments d'ordre 2, les deux séries de termes généraux respectifs $k^2 P(X = k)$ et $k^2 P(T = k)$ convergent et il en est de même pour la série de terme général $k^2 P(T = k)$. Ainsi, T admet un moment d'ordre 2 et une variance. De plus,

$$V(T) = 2V(X) - V(Z).$$

Par le même raisonnement on obtient aussi $E(T) = 2E(X) - E(Z)$. En observant, et c'est utile pour toute la suite, que

$$(1-q^2)^2 = ((1-q)(1+q))^2 = p^2(1+q)^2,$$

le calcul donne

$$\begin{aligned} E(T) &= 2E(X) - E(Z) \\ &= \frac{2}{p} - \frac{1}{1-q^2} \\ &= \frac{2(1-q^2) - p}{p(1-q^2)} = \frac{(1+2q)}{(1-q^2)} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
E(T^2) &= 2E(X^2) - E(Z^2) \\
&= 2\left(V(X) + E(X)^2\right) - \left(V(Z) + E(Z)^2\right) \\
&= 2\left(\frac{q}{p^2} + \frac{1}{p^2}\right) - \left(\frac{q^2}{(1-q^2)^2} + \frac{1}{(1-q^2)^2}\right) \\
&= \frac{2(q+1)}{p^2} - \frac{(q^2+1)}{(1-q^2)^2}.
\end{aligned}$$

Enfin, par la formule de König-Huygens,

$$\begin{aligned}
V(T) &= E(T^2) - E(T)^2 \\
&= \frac{2(q+1)}{p^2} - \frac{(q^2+1)}{(1-q^2)^2} - \frac{(1+2q)^2}{(1-q^2)^2} \\
&= \frac{2(q+1)(1+q)^2}{(1-q^2)^2} - \frac{(q^2+1)}{(1-q^2)^2} - \frac{(1+2q)^2}{(1-q^2)^2} \\
&= \frac{2q^3+q^2+2q}{(1-q^2)^2} = \frac{q(2q^2+q+2)}{(1-q^2)^2}.
\end{aligned}$$

Ouf, c'est bien la formule attendue. On respire.

(5) Étant clair que $Z + T = X + Y$, on a, d'une part

$$V(Z+T) = V(X+Y) = V(X) + V(Y) = 2V(X) = \frac{2q}{p^2} = \frac{2q(1+q)^2}{(1-q^2)^2}$$

car X et Y indépendantes de même loi. D'autre part,

$$V(Z+T) = V(Z) + V(T) + 2\text{cov}(Z,T) \iff \text{cov}(Z,T) = \frac{1}{2}\left(V(Z+T) - V(Z) - V(T)\right).$$

Il suit que

$$\begin{aligned}
\text{cov}(Z,T) &= \frac{1}{2}\left(\frac{2q}{p^2} - \frac{q(2q^2+q+2)}{(1-q^2)^2} - \frac{q^2}{(1-q^2)^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2q(1+q)^2}{(1-q^2)^2} - \frac{2q(q^2+q+1)}{(1-q^2)^2}\right) \\
&= \frac{q^2}{(1-q^2)^2} = V(Z).
\end{aligned}$$

Comme $\text{cov}(Z,T) \neq 0$, on peut en déduire que Z et T ne sont pas indépendantes.

Exercice 3

(1) On remarque que

- Pour tout $t \geq 1$, $\dfrac{\ln(t)}{1+t^2} \geq 0$;
- Au voisinage de $+\infty$

$$\frac{\ln(t)}{1+t^2} = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$$

Ainsi, par critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives (*via* comparaison à une intégrale de Riemann convergente, avec $\alpha = 3/2 > 1$),

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

Il reste à montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

Cette intégrale est impropre en 0. On sait (ce qu'on peut éventuellement redémontrer à l'aide d'une primitive du log ou - si on ne la connait pas - avec une intégration par parties) que $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ converge. Or, au voisinage de 0,

$$\frac{\ln(t)}{1+t^2} \sim \frac{\ln(t)}{2}.$$

Par critère d'équivalence pour les intégrales (de fonctions négatives), on peut conclure à la convergence de l'intégrale entre 0 et 1 puis enfin à celle de l'intégrale demandée.

(2) Soient $\varepsilon > 0$ et $A \geq 1$. La fonction $u: \ t \mapsto 1/t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon; A]$. En posant $u = u(t)$, on a

$$\mathrm{d}u = u'(t)\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2},$$

Ainsi,

$$\int_\varepsilon^A \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t \quad = \quad \int_\varepsilon^A \frac{\ln(t)}{t^2\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}\mathrm{d}t = -\int_{1/\varepsilon}^{1/A} \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{(1+u^2)}\mathrm{d}u = -\int_{1/A}^{1/\varepsilon} \frac{\ln(u)}{(1+u^2)}\mathrm{d}u$$

Or,

$$\frac{1}{A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \frac{1}{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty, ,$$

et comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u$ converge d'après la première question, on a

$$I \underset{A\to+\infty,\,\varepsilon\to 0^+}{\longleftarrow} \int_\varepsilon^A \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t = -\int_{1/A}^{1/\varepsilon} \frac{\ln(u)}{(1+u^2)}\mathrm{d}u \underset{A\to+\infty,\,\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} -I.$$

Ainsi, $I = -I$ et, nécessairement, $I = 0$.

Exercice 4

Cet exercice ressemble beaucoup à un exercice posé dans le sujet **EDHEC 2019**.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t.$$

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto (1-t^2)^n$ est continue sur $[0;1]$, donc l'intégrale I_n est bien définie. De plus

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\mathrm{d}t - \int_0^1 (1-t^2)^n\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left((1-t^2)^{n+1} - (1-t^2)^n\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (1-t^2)^n(-t^2)\mathrm{d}t \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

par positivité de l'intégrale, car, pour tout $t \in [0;1]$, $-t^2(1-t^2)^n \leq 0$. On a bien que $I_{n+1} \leq I_n$ et donc, la suite (I_n) est décroissante.

(2) Pour l'inégalité de gauche, c'est trivial; si $u \in [0;1]$, alors $1-u \geq 0$. Concernant celle de droite, c'est une inégalité classique dont on a déjà montré plusieurs variantes. On propose ici un argument de convexité. En effet, $u \mapsto e^{-u}$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (donc sur $[0;1]$) car sa dérivée seconde est strictement positive. Sa courbe est alors au dessus de toutes ses tangentes, en particulier celle au point $u=0$ dont l'équation est $y = 1-u$ donnant ainsi l'inégalité voulue.

(3) Pour tout $x \geq 0$, $e^{-x^2} \geq 0$ et, au voisinage de $+\infty$, on a $e^{-x^2} = o(1/x^2)$. Par critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives et par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, on peut conclure que

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x \text{ converge.}$$

Sur $[0;1]$, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue et l'intégrale est alors bien définie. Au final, on a bien le résultat voulu.

(4) Posons $x = \sqrt{n}t$. Le changement de variable est affine donc licite. On a

$$\mathrm{d}x = \sqrt{n}\mathrm{d}t \Longleftrightarrow \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi, en commençant par utiliser l'avant-dernière question

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^1 \left(e^{-t^2}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^1 e^{-nt^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{n}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

car $e^{-x^2} \geq 0$ et que l'intégrale converge, ce qui est bien l'inégalité voulue.

(5) Comme $I_n \geq 0$ (par positivité de l'intégrale, car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction sous l'intégrale est positive sur $[0;1]$), l'inégalité précédente permet, *via* le théorème des gendarmes de conclure que

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 0.$$

(6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que

$$(1-t^2)^n = (1-t^2)(1-t^2)^{n-1} = 1 - t \times t(1-t^2)^{n-1},$$

il suit que, par linéarité de l'intégrale

$$\int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t^2)^{n-1}\mathrm{d}t - \int_0^1 t \times t(1-t^2)^{n-1}\mathrm{d}t = I_{n-1} - \int_0^1 t \times t(1-t^2)^{n-1}\mathrm{d}t,$$

et on a, en posant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u' &=& t(1-t^2)^{n-1} \\ v &=& t \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{lcl} u &=& -\frac{1}{2n}(1-t^2)^n \\ v' &=& 1 \end{array} \right.$$

Les fonctions u et v étant bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, l'intégration par parties est licite et donne

$$\begin{aligned} I_n &= I_{n-1} - \int_0^1 t \times t(1-t^2)^{n-1}\mathrm{d}t \\ &= I_{n-1} - \left[-\frac{t(1-t^2)^n}{2n}\right]_0^1 - \frac{1}{2n}\int_0^1 (1-t^2)^n\mathrm{d}t \\ &= I_{n-1} - \frac{1}{2n} I_n \end{aligned}$$

ou encore

$$I_n + \frac{1}{2n} I_n = I_{n-1} \Longleftrightarrow I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

(7) Comme l'énoncé le demande, on procède par récurrence.

- <u>initialisation.</u> Pour $n = 0$
$$I_0 = \int_0^1 (1-t^2)^0\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1 = \frac{(2^0 0!)^2}{(2\times 0+1)!}.$$
- <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait
$$I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$
Mais alors
$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} I_n && \text{(d'après (6))} \\ &= \frac{2(n+1)}{2n+3}\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} && \text{(d'après (HR))} \\ &= \frac{2(n+1)(2n+2)(2^n n!)^2}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} \\ &= \frac{2^2(n+1)^2(2^n n!)^2}{(2n+3)!} \\ &= \frac{(2^{n+1}(n+1)!)^2}{(2n+3)!}, \end{aligned}$$
ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence.