ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir Maison n°5

Cahier de vacances de Noël
À rendre le 07/01

Échauffement

Les question de cet exercice sont indépendantes.

(1) Justifier la convergence de l'intégrale impropre
$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^t - 1}{\sqrt{t^3}}\right) e^{-2t} \mathrm{d}t.$$

(2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2}, & \text{si } |x| \geq 1 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (a) Montrer que f est paire. Représenter sommairement la courbe de f.
- (b) Montrer que f est une densité de probabilité. Dans toute la suite on note X une v.a. dont f est une densité ainsi que F_X sa fonction de répartition.
- (c) Exprimer $F_X(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- (d) X admet-elle une espérance ?

(3) On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on note f l'application
$$f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{a+d}{2} I + \frac{b+c}{2} J.$$

- (a) Calculer $f(I)$ et $f(J)$.
- (b) Montrer que f est un endomorphisme.
- (c) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$. L'endomorphisme f est-il injectif?
- (d) En déduire le rang de f puis une base de l'image de f.

Exercice 1

L'objet de cet exercice est la formulation du critère de *transformation d'Abel*, aussi appelée *sommation par parties*. Le résultat n'est pas au programme en ECE mais donne matière à ce chouette exercice.

Soient (a_n) et (b_n) deux suites. On note,

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k.$$

(1) Montrer, en exhibant un lien entre b_k et B_k, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n = a_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} B_k (a_k - a_{k+1}).$$

(2) Démontrer alors le critère d'Abel, dont l'énoncé suit.

Si la suite (a_n) tend vers 0, si la suite (B_n) est bornée et si la série $\sum (a_{k+1} - a_k)$ converge absolument, alors la série $\sum a_k b_k$ converge.

(3) <u>Application.</u> On considère la série $\sum (-1)^n \sqrt{n} \ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)$.

(a) Rappeler les DL en 0 à l'ordre 2 de

$$\ln(1+u) \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1+u}.$$

(b) Montrer que

$$a_n = \sqrt{n} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \sim \frac{2}{\sqrt{n}}, \qquad n \to +\infty$$

(c) En déduire que la série n'est pas absolument convergente.

(d) Montrer que

$$\frac{2}{n} - \frac{2}{n-1} = \frac{-2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \text{et que} \quad \frac{-2}{n^2} + \frac{2}{(n-1)^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

(e) En déduire que

$$a_{n+1} - a_n \sim \frac{-1}{n\sqrt{n}}, \qquad n \to +\infty.$$

(f) Conclure que le critère d'Abel s'applique et que la série est bien convergente.

Exercice 2

On considère la matrice l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice, dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer, sans pivot, que A n'est pas inversible et déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

(2) (a) Calculer A^2, A^3, A^4.
(b) Déterminer noyau de f et préciser sa dimension.

(3) (a) Montrer que si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^4$, avec $u \neq 0$ et $f(u) = \lambda u$, alors $f^4(u) = \lambda^4 u$. En déduire que $\lambda^4 = 0$ puis que $\lambda = 0$.
(b) Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de f est diagonale? (*On raisonnera par l'absurde en utilisant la question précédente.*)

(4) On note

$$\varepsilon_1 = e_1, \quad \varepsilon_2 = f(\varepsilon_1), \quad \varepsilon_3 = f(\varepsilon_2), \quad \varepsilon_4 = f(\varepsilon_3), \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}.$$

(a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
(b) Déterminer la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{C}$ de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

(5) Existe-t-il un endomorphisme bijectif g de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ tel que $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$?

Problème

Partie I - Étude d'une variable aléatoire

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$.

(1) Vérifier que f est paire.
(2) Montrer que f est une densité de probabilité.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f?

(3) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
(4) (a) Montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t f(t) \mathrm{d}t.$$

(b) En déduire que X admet une espérance et que celle-ci est nulle.

Partie II - Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \ln(1 + e^x)$.

(5) Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.
(6) Exprimer, pour tout $y \in J$, $\varphi^{-1}(y)$.

On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \varphi(X)$.

(7) Justifier que $P(Y \leq 0) = 0$.
(8) Donner la fonction de répartition de Y.
(9) Reconnaître, sans calcul supplémentaire, la loi de Y et en déduire son espérance et sa variance.

Partie III - Étude d'une convergence

On considère maintenant une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi, ayant toutes pour densité la fonction f définie à la Partie I.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

(10) Justifier que
$$[T_n \leq x] = [X_1 \leq x] \cap [X_2 \leq x] \cap \cdots \cap [X_n \leq x].$$
(11) En déduire que la fonction de répartition de T_n, notée G_n est donnée par $G_n(x) = (1 + e^{-x})^{-n}$.
(12) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$P(U_n \leq x) = \left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}.$$
(13) Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de $P(U_n \leq x)$ lorsque $n \to +\infty$. On note $G(x)$ cette limite.
(14) Montrer que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, que l'on notera Z, et préciser une densité de Z.

Problème 2 (*Facultatif)

On **rappelle** les résultats suivants :

- Toute famille de polynôme de degrés échelonnés est libre.
- Tout polynôme admettant une infinité de racines est le polynôme nul.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Δ_n l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme
$$\Delta_n(P) = P(X+1) - P(X).$$
On pose
$$P_0 = 1, \quad P_1 = X, \quad P_2 = \frac{1}{2}X(X-1) \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![3;n]\!], \quad P_k = \frac{1}{k!}X(X-1)\dots(X-k+1).$$

Partie I : Étude de Δ_n.

(1) Justifier que Δ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
(2) (a) Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
(b) Vérifier que :
$$\Delta_n(P_0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1;n]\!], \quad \Delta_n(P_k) = P_{k-1}.$$
(c) En déduire que $\operatorname{Im}(\Delta_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ puis préciser $\operatorname{rg}(\Delta_n)$.
(d) En déduire que $\operatorname{Ker}(\Delta_n)$ est l'ensemble $\mathbb{R}_0[X]$ des polynômes constants.
(e) L'application Δ_n est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?
(3) Dans le cas particulier où $n = 3$, écrire la matrice M de Δ_3 relativement à la base (P_0, P_1, P_2, P_3).

Partie II : Coordonnées d'un polynôme dans la base $(P_0, \dots, P_n)$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on rappelle que
$$\Delta_n^i = \underbrace{\Delta_n \circ \cdots \circ \Delta_n}_{i \text{ fois}}.$$
(1) Soit $k \in [\![1;n]\!]$ et $i \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\Delta_n^i(P_k) = \begin{cases} P_{k-i} & \text{si } i \leq k, \\ 0 & \text{si } i > k. \end{cases}$$

(2) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Justifier qu'il existe des réels $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ tels que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(X)$.
   (b) En déduire que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$

$$\Delta_n^i(P)(X) = \sum_{k=0}^{n-i} a_{k+i} P_k(X).$$

   (c) En évaluant l'expression précédente en 0, montrer alors que

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \Delta_n^i(P)(0) P_i(X).$$

Partie III : Généralisation à $\mathbb{R}[X]$.

On note Δ l'endomorphisme qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

(1) Soit $P \in \operatorname{Ker}(\Delta)$.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(k) = P(0)$.
   (b) En considérant le polynôme, $Q(X) = P(X) - P(0)$, en déduire que $\operatorname{Ker}(\Delta)$ est l'ensemble $\mathbb{R}_0[X]$ des polynômes constants.

(2) Montrer que Δ est surjectif. *On pourra utiliser la question 2c de la partie I*

Exercice sous `SciLab`

On rappelle que la commande `grand(1, N, 'exp', lam)` permet de générer un échantillon de taille N dont les composantes représentent des réalisations de variables aléatoires indépendantes de même loi normale $\mathcal{E}$(`lam`).

On considère une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et la variable $y = \lfloor X \rfloor$.

(1) Recopier, compléter et exécuter les commandes

```
X=grand(1, 1000, 'exp', 1);
Y=................................;
```

(2) Donner une valeur approchée de l'espérance `m` et de la variance de Y.
(3) Compléter les lignes suivantes afin de classer les valeurs de la série statistique `Y` dans une matrice à deux colonnes dont la première représente les modalités (par ordre croissant) et la seconde les effectifs correspondants et représenter le diagramme à bâtons des *fréquences* de la série statistique `Y`.

```
U=tabul(...... , .......) ;
bar(........., ............, 0.3, 'black')
```

(4) Recopier, exécuter et interpréter les instructions suivantes

```
x=0:length(U);
p=1-exp(-1);
G=p*(1-p)^x;
bar(x+.5, G, 0.3, 'yellow')
```