ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°5

Cahier de vacances de Noël
Solution

Échauffement

Les question de cet exercice sont indépendantes.

(1) L'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$. Observons que; par limite usuelle

$$\frac{e^t-1}{t} \longrightarrow 1, \quad t \to 0,$$

ce qui donne

$$\left(\frac{e^t-1}{\sqrt{t^3}}\right)e^{-2t} = \frac{e^t-1}{t} \times e^{-2t} \times \frac{1}{\sqrt{t}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad t \to 0,$$

et on reconnait une intégrale de Riemann qui converge ($\alpha = 1/2 < 1$). Donc l'intégrale est convergente en 0 par critère d'équivalence. En $+\infty$, on a

$$\left(\frac{e^t-1}{\sqrt{t^3}}\right)e^{-2t} = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right).$$

En effet

$$t^{3/2}\left(\frac{e^t-1}{\sqrt{t^3}}\right)e^{-2t} = (e^t-1)e^{-2t} = e^{-t} - e^{-2t} \longrightarrow 0, \quad t \to +\infty.$$

Par critère de négligeabilité et comparaison à une intégrale de Riemann, l'intégrale est bien convergente en $+\infty$. Au final,

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^t-1}{\sqrt{t^3}}\right)e^{-2t}\mathrm{d}t$$

converge.

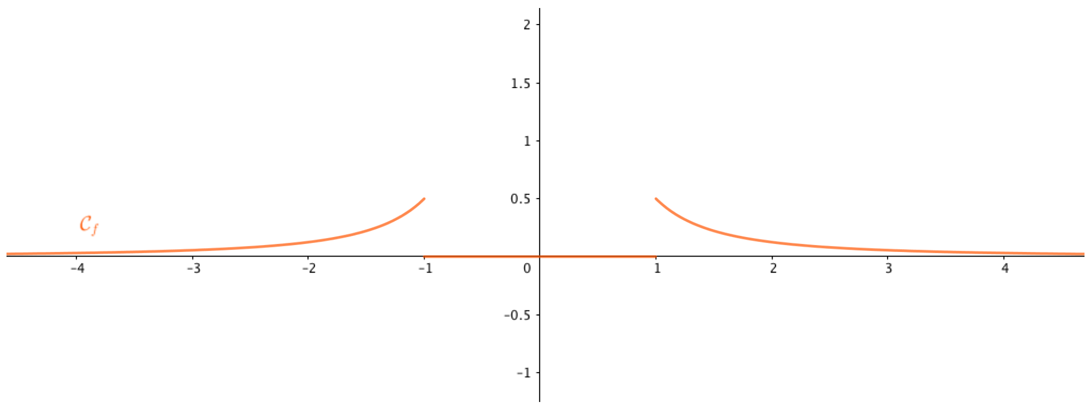
(2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2}, & \text{si } |x| \geq 1 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Il faut montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$. C'est facile. En effet,

- Si $-1 < x < 1$, alors $-1 < -x < 1$ et $f(-x) = 0 = f(x)$.
- Si $x \leq -1$ ou $x \geq 1$ alors $-x \leq -1$ ou $-x \geq 1$ et donc $f(-x) = \frac{1}{2(-x)^2} = \frac{1}{2x^2} = f(x)$.

On dessine sommairement pour se représenter la situation la courbe de f sur $\mathbb{R}$. On observe notamment la parité (symétrie par rapport à l'axe des ordonnées) et la discontinuité en -1 et en 1.



(b) D'après le cours, il faut donc vérifier trois points:

- Que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ceci est clair; f est nulle sur $]-1;1[$ et ailleurs, $f(x) = 1/2x^2 > 0$.

- Que f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+/\infty[$, f est continue comme inverse d'une fonction polynômiale (donc continue) qui ne s'annule pas. Ailleurs, f est constante égale à 0 donc continue. En -1 et 1, f n'est pas continue, mais ce n'est pas grave car il ne s'agit que de deux points.

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut 1. Par parité, il suffit de montrer la convergence sur $[0;+\infty[$ et comme f est nulle sur $[0;1[$, il suffit de montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ et que cette intégrale vaut $1/2$. Soit donc $A \geq 1$

$$\begin{aligned} \int_1^A f(x)\mathrm{d}x &= \int_1^A \frac{\mathrm{d}x}{2x^2} \\ &= \left[-\frac{1}{2x}\right]_1^A \\ &= -\frac{1}{2A} + \frac{1}{2} \\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait. f est donc bien une densité de probabilité.

(c) On sait que

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x.$$

Il faut donc différencier des cas selon la position de t

- Si $t \leq -1$,
$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to-\infty}\int_A^t \frac{\mathrm{d}x}{2x^2} = \lim_{A\to-\infty}\left[-\frac{1}{2x}\right]_A^t = -\frac{1}{2t}.$$
- Si $-1 \leq t \leq 1$,
$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-1} f(x)\mathrm{d}x + \int_1^t f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$
- Si $t \geq 1$,
$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{-1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int_1^t f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \int_1^t f(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2t} = 1 - \frac{1}{2t}. \end{aligned}$$

Au final,
$$F_X(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2t}, & \text{si } t \leq -1 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2t}, & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

(d) Par définition, X admet une espérance si et seulement si
$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \quad \text{converge absolument} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)\mathrm{d}x \quad \text{converge.}$$
Comme la fonction $x \mapsto |x|f(x)$ est paire (produit de fonctions paires), cette convergence est équivalente à celle sur $[0;+\infty[$. Comme f est nulle sur $[0;1[$, la convergence est elle-même équivalente à celle de
$$\int_1^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{x}{2x^2}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x}.$$
Or, cette intégrale diverge (par le critère de Riemann). Donc X n'admet pas d'espérance.

(3) On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on note f l'application
$$f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{a+d}{2}I + \frac{b+c}{2}J.$$

(a) Il découle de la définition que
$$f(I) = I \qquad \text{et} \qquad f(J) = J.$$

(b) La combinaison linéaire de matrices 2×2 étant encore une matrice 2×2, les images de f sont bien dans $\mathcal{M}_2$. Il reste à voir que f est bien linéaire. Soient
$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On voit que

$$\begin{aligned} f(M+\lambda N) &= f\left(\begin{pmatrix} a+\lambda x & b+\lambda y \\ c+\lambda z & d+\lambda t \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{a+\lambda x+d+\lambda t}{2} I + \frac{b+\lambda y+c+\lambda z}{2} J \\ &= \frac{a+d}{2} I + \frac{b+c}{2} J + \lambda\left(\frac{x+t}{2} I + \frac{y+z}{2} J\right) \\ &= f(M)+\lambda f(N) \end{aligned}$$

et f est bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_2$.

(c) On résout!

$$\begin{aligned} M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(M)=0 \\ &\iff \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a+d &=& 0 \\ b+c &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il suit que

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

La famille génératrice ci-dessus est composée de deux matrices non colinéaires, elle forme donc une base du noyau de f. Celui-ci n'étant pas réduit à la matrice nulle, l'endomorphisme n'est pas injectif (ni surjectif, ni bijectif).

(d) La base trouvée à la question précédente permet d'affirmer que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$. Par le théorème du rang, il suit que

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathcal{M}_2) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 4-2 = 2.$$

Mais comme $f(I)=I$ et $f(J)=J$, les matrices I et J sont dans l'image de f. Elles sont non colinéaires et engendrent donc un sous-espace de l'image de dimension 2. Comme l'image est elle-même de dimension 2, (I,J) forme finalement une base de l'image de f.

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(I,\ J).$$

Exercice 1

L'objet de cet exercice est la formulation du critère de *transformation d'Abel*, aussi appelée *sommation par parties*. Le résultat n'est pas au programme en ECE mais donne matière à ce chouette exercice.

Soient (a_n) et (b_n) deux suites. On note,

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k.$$

(1) L'idée principale de cette question est d'observer que

$$b_k = B_k - B_{k-1}.$$

Ainsi, notant $B_{-1} = 0$,

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=0}^{n} a_k(B_k - B_{k-1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \qquad \text{(changement d'indice)} \\
&= a_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} B_k(a_k - a_{k+1}).
\end{aligned}$$

(2) Supposons donc que

La suite (a_n) tend vers 0;
la suite (B_n) est bornée;
la série $\sum(a_{k+1} - a_k)$ converge absolument.

On peut alors déduire que

- la suite $(a_n B_n)$ converge vers 0. En effet, comme (B_n) est bornée, il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|B_n| \leq M$. Il suit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$-M a_n \leq a_n B_n \leq M a_n$$

  et par le théorème des gendarmes, $a_n B_n$ tend bien vers 0;

- La série $\sum B_k(a_k - a_{k+1})$ converge (absolument). En effet,

$$|B_k(a_k - a_{k+1})| \leq M|a_{k+1} - a_k|$$

  et comme par hypothèse la série $\sum(a_k - a_{k+1})$ converge absolument, le critère de comparaison pour les séries à termes positifs permet d'affirmer que la série $\sum B_k(a_k - a_{k+1})$ converge absolument et donc converge.

Ainsi, la somme partielle S_n admet une limite finie, ce qui est la définition d'une série convergente.

(3) Application. On considère la série $\sum(-1)^n \sqrt{n} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$.

(a) On les connait sur le bout des doigts

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2), \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2).$$

(b) On commence par réécrire la quantité dans le log.

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \\ &= \sqrt{n}\ln\left(\frac{n-1+2}{n-1}\right) = \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \\ &= \sqrt{n}\left(\frac{2}{(n-1)} - \frac{2}{(n-1)^2} + o\left(\frac{1}{(n-1)}\right)^2\right) \\ &= \frac{2\sqrt{n}}{n-1} + o\left(\frac{\sqrt{n}}{n-1}\right) = \frac{2\sqrt{n}}{n-1} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &\sim \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad n \to +\infty. \end{aligned}$$

(c) Comme

$$\left|(-1)^n\sqrt{n}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right| = a_n \sim \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad n \to +\infty,$$

le critère d'équivalence (en comparaison à une série de Riemann divergente) permet d'affirmer que la série ne converge pas absolument.

(d) Il s'agit de mettre au même dénominateur. D'une part

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} - \frac{2}{n-1} &= \frac{2(n-1)-2n}{n(n-1)} = \frac{-2}{n(n-1)} \\ &\sim \frac{-2}{n^2}, \quad n \to +\infty \end{aligned}$$

ou encore

$$\frac{2}{n} - \frac{2}{n-1} = \frac{-2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{-2}{n^2} + \frac{2}{(n-1)^2} &= \frac{-2(n-1)^2+2n^2}{n^2(n-1)^2} \\ &= \frac{4n-2}{n^2(n-1)^2} \\ &= o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

(e) On utilise les DL rappelés ci-dessus.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sqrt{n+1}\ln\left(\frac{n+2}{n}\right) - \sqrt{n}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \\ &= \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\ln\left(\frac{n+2}{n}\right) - \sqrt{n}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \\ &= \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)\right) \\ &= \sqrt{n}\left(\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(\frac{2}{(n-1)} - \frac{2}{(n-1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n &= \sqrt{n}\left(\frac{2}{n-1}-\frac{2}{(n-1)^2}+\frac{1}{n(n-1)}-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= \sqrt{n}\left(\frac{-2}{n^2}+\frac{1}{n(n-1)}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\sqrt{n}\left(\frac{-2}{n^2}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= \sqrt{n}\left(\frac{-1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&\sim \frac{-1}{n\sqrt{n}}, \qquad n\to+\infty.
\end{aligned}$$

(f) On vérifie que les hypothèses du critères sont bien satisfaites:

- Comme $a_n \sim 2/\sqrt{n}$, on a bien que $a_n \to 0$;
- La suite (B_n) est bornée. En effet

$$B_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k=\begin{cases}1, & \text{si } n \text{ est pair}\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

  Donc $|B_n|\leq 1$;
- La série $\sum(a_{k+1}-a_k)$ converge absolument. En effet,

$$|a_{k+1}-a_k|\sim\frac{1}{k\sqrt{k}}$$

  et par équivalence avec une série de Riemann convergente, on a bien la convergence.

Tous les critères sont satisfaits, la série considérée converge.
Conclure que le critère d'Abel s'applique et que la série est bien convergente.

Exercice 2 - D'après EML 2001

On considère la matrice $A\in\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ est A.

(1) Les colonnes de A sont liées : $C_1+C_2+C_3-C_4=0$ donc A n'est pas inversible. Par ailleurs, les trois premières colonnes sont libres. En effet,

$$\begin{aligned}
\lambda_1C_1+\lambda_2+\lambda_3C_3=0 &\iff \begin{cases}\lambda_1 &= 0\\ \lambda_1 &= 0\\ \lambda_2 &= 0\\ \lambda_3 &= 0\end{cases}\\
&\iff \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0
\end{aligned}$$

Par conséquent, comme elles engendrent l'image de f, elles en forment également une base et on peut en déduire la dimension de celle ci: $\dim \mathrm{Im}(f) = 3$ et

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

(2) (a) On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Pour déterminer le noyau, on résout l'équation $f(u) = 0$:

$$\begin{aligned} u = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(f) &\iff A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} x - t = 0 \\ x - t = 0 \\ y - t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \\ &\iff u = t\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc, le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ engendre le noyau et en forme donc une base. Le noyau de f est donc de dimension 1 (ce qu'on savait déjà par le théorème du rang).

(3) (a) On a vu ci-dessus que $A^4 = 0$. Or, A^4 est la matrice dans la base canonique de $f^4 = f \circ f \circ f \circ f \circ f$. Supposons alors qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \neq 0$ tels que $f(u) = \lambda u$. En appliquant f quatre fois, on obtient

$$f^4(u) = f^3(f(u)) = f^3(\lambda u) = \lambda f^3(u) = \lambda f^2(f(u)) = \lambda f^2(\lambda u) = ... = \lambda^4 u.$$

Or $f^4 = 0$ donc $f^4(u) = 0$, mais cela donne $\lambda^4 u = 0$. Or $u \neq 0$ donc $\lambda^4 = 0$. La seule solution de cette équation de degré 4 est $\lambda = 0$.

(b) Supposons qu'il existe une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ représentant f dans une base $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Par définition de la matrice d'une application dans une base, cela voudrait dire que $f(u_1) = \lambda_1 u_1, f(u_2) = \lambda_2 u_2$, $f(u_3) = \lambda_3 u_3$ et $f(u_4) = \lambda_4 u_4$. Mais d'après la question précédente, on ne peut alors avoir comme valeur pour chacun des λ_i que 0. Ainsi D est la matrice nulle. Mais la matrice nulle ne peut représenter qu'un endomorphisme nul et f n'est pas nul, donc ce n'est pas possible. *On dit que f n'est pas diagonalisable.*

(4) On note

$$\varepsilon_1 = e_1, \quad \varepsilon_2 = f(\varepsilon_1), \quad \varepsilon_3 = f(\varepsilon_2), \quad \varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$$

et $\mathcal{C} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$.

(a) Commençons par écrire les composantes des vecteurs ε_i

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \ \varepsilon_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \ \varepsilon_3 = f^2(e_1) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \ \varepsilon_4 = f^3(e_1) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Pour montrer qu'une famille de quatre vecteurs de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ en forme une base, il suffit de montrer qu'ils forment une famille libre.

$$\begin{aligned}\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \lambda_3\varepsilon_3 + \lambda_4\varepsilon_4 = 0 \iff & \left\{\begin{array}{rcl}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &=& 0\\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &=& 0\\ \lambda_3 + \lambda_4 &=& 0\\ \lambda_4 &=& 0\end{array}\right.\\ \iff & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.\end{aligned}$$

et $\mathcal{C}$ forme bien une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On aurait aussi pu raisonner sans les composantes en composant la relation de liaison successivement par f^3 (pour ne garder que λ_4 et montrer qu'il est nul), puis par f^2 (pour faire la même chose sur λ_3), puis par f (pour λ_2). Et enfin on aurait eu seulement λ_1 qui se serait retrouvé nul également.

(b) Par définition des vecteurs de $\mathcal{C}$ et comme $f^4 = 0$, on a

$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2, \ f(\varepsilon_2) = \varepsilon_3, \ f(\varepsilon_3) = \varepsilon_4, \ f(\varepsilon_4) = 0$$

et la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ est alors

$$N = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

(5) Supposons que ce soit le cas. On aurait alors

$$g \circ f^2 \circ g^{-1} = \left(g \circ f \circ g^{-1}\right)^2 = \left(f^2\right)^2 = f^4 = 0$$

ce qui donnerait,

$$f^2 = g^{-1} \circ 0 \circ g = 0$$

mais ce qui n'est pas le cas. Il n'existe donc pas de tel endomorphisme.

Problème - D'après EML 2016

Partie I - Étude d'une variable aléatoire

(1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a bien sûr $-t \in \mathbb{R}$ (symétrie du domaine de définition) et

$$f(-t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} = \frac{\frac{1}{e^{-t}}}{\left(1+\frac{1}{e^{-t}}\right)^2} = \frac{1}{e^{-t}} \frac{1}{\left(\frac{e^{-t}+1}{e^{-t}}\right)^2} = \frac{1}{e^{-t}} \frac{(e^{-t})^2}{(e^{-t}+1)^2} = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$$

soit $f(-t) = f(t)$. Ainsi

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est paire.}}$$

(2) La fonction f est (clairement) positive et continue sur $\mathbb{R}$. Étudions la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ en commençant par celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$. Soit $x > 0$.

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\,dt = \int_0^x -\frac{-e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\,dt = \left[\frac{1}{1+e^{-t}}\right]_0^x = \frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{2}.$$

De $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ on déduit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{2}$ ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{2}$. Comme f est paire, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et vaut $2\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ soit $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$. Toutes les conditions sont réunies pour conclure que

$$\boxed{f \text{ est une densité d'une variable aléatoire réelle.}}$$

(3) La fonction de répartition de X est donnée, pour tout x réel, par $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,dt$. Soit x un réel. Pour $y < x$ on a

$$\int_y^x f(t)\,dt = \left[\frac{1}{1+e^{-t}}\right]_y^x = \frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{1+e^{-y}}.$$

De $\displaystyle\lim_{y\to-\infty} \frac{1}{1+e^{-y}} = 0$ on déduit $\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,dt = \frac{1}{1+e^{-x}}$. La fonction de répartition F est donc définie par

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}.}$$

(4) (a) Nous avons $tf(t) = \frac{te^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$. Montrons que $tf(t)$ est négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$. Nous avons

$$\frac{tf(t)}{\frac{1}{t^2}} = \frac{t^3e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}.$$

Par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^3e^{-t} = 0$ ce qui donne $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{tf(t)}{\frac{1}{t^2}} = 0.$ et prouve que $tf(t)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$.

Les fonctions $t \mapsto tf(t)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sont continues et positives sur $[1, +\infty[$. De plus, $tf(t)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ convergente car d'exposant $\alpha = 2 > 1$. On en déduit, à l'aide du critère de convergence par équivalence, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ est elle aussi convergente.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 tf(t)\, dt$ est l'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0, 1]$ (et ne pose donc pas de problème). Nous pouvons donc affirmer que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} tf(t)\, dt \text{ est convergente.}}$$

(b) La fonction f étant paire, il est facile de s'assurer que la fonction $t \mapsto tf(t)$ est impaire. Cette imparité et la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\, dt$, induisent que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\, dt$ est convergente et égale à 0. Ainsi, X admet une espérance avec

$$\boxed{E(X) = 0.}$$

Partie II - Étude d'une autre variable aléatoire

(5) La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec, pour tout x réel, $\varphi'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$. La fonction φ' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et φ est strictement croissante.

Sur $\mathbb{R}$ la fonction φ est donc continue, strictement croissante avec (sans problème) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$. On en déduit que

$$\boxed{\varphi \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } I =]0, +\infty[.}$$

(6) Soit $y \in]0, +\infty[$ et $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la bijectivité des fonctions exponentielle et logarithme, les égalités suivantes sont deux à deux équivalentes :

$$[y = \varphi(x)] \iff [y = \ln(1 + e^x)] \iff [e^y = 1 + e^x] \iff [e^y - 1 = e^x] \iff [x = \ln(e^y - 1)]\,.$$

Ceci prouve que

$$\boxed{\forall y \in]0, +\infty[, \quad \varphi^{-1}(y) = \ln(e^y - 1).}$$

(7) Nous avons $P(Y \leq 0) = P(\varphi(X) \leq 0)$. Comme φ est à valeurs dans $]0, +\infty[$, l'événement $(\varphi(X) \leq 0)$ est impossible. On en déduit

$$\boxed{P(Y \leq 0) = 0.}$$

(8) Notons G la fonction de répartition de Y. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $G(x) = P(Y \leq x)$. Comme toute fonction de répartition, G est à valeurs dans $[0, 1]$ et croissante. La question précédente a montré que $G(0) = 0$ d'où l'on déduit que pour tout $x \leq 0$ on a $G(x) = 0$. Soit $x > 0$.

$$G(x) = P(Y \leq x) = P(\varphi(X) \leq x) = P(X \leq \varphi^{-1}(x)) = F(\varphi^{-1}(x)) = F(\ln(e^x - 1)).$$

Or

$$F(\ln(e^x - 1)) = \frac{1}{1 + e^{-\ln(e^x - 1)}} = \frac{1}{1 + e^{\ln\left(\frac{1}{e^x - 1}\right)}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x - 1}} = \frac{1}{\frac{e^x - 1 + 1}{e^x - 1}} = \frac{e^x - 1}{e^x} = 1 - e^{-x}.$$

Finalement, la fonction de répartition de Y est définie par :

$$\boxed{G(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0\ ; \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}}$$

(9) La fonction G est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi la loi de Y est la loi exponentielle de paramètre 1; il suit que $E(Y) = 1$ et $V(Y) = 1$.

Partie III - Étude d'une convergence

(10) Notons H_n la fonction de répartition de T_n. Classiquement, pour tout x réel nous avons l'égalité

$$(T_n \leq x) = (X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap \ \cdots \ \cap (X_n < x),$$

et donc

$$H_n(x) = P(T_n \leq x) = P\left((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap \ldots \cap (X_n \leq x)\right).$$

Par indépendance des X_i,

$$H_n(x) = P\left(X_1 \leq x\right) P\left(X_2 \leq x\right) \cdot \cdots \cdot P\left(X_n \leq x\right) = F(x) \cdot F(x) \cdot \cdots \cdot F(x) = (F(x))^n.$$

En reprenant l'expression de F il vient $H_n(x) = \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^n$ ou encore

$$\boxed{H_n(x) = \left(1 + e^{-x}\right)^{-n}.}$$

(11) Notons K_n la fonction de répartition de U_n. Soit x un réel.

$$K_n(x) = P\left(U_n \leq x\right) = P\left(T_n - \ln(n) \leq x\right) = P\left(T_n \leq x + \ln(n)\right) = H_n\left(x + \ln(n)\right).$$

En reportant dans l'expression de H_n il vient

$$K_n(x) = \left(1 + e^{-x-\ln(n)}\right)^{-n} = \left(1 + e^{-x}e^{-\ln(n)}\right)^{-n} = \left(1 + e^{-x}e^{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^{-n}$$

soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad K_n(x) = P(U_n \leqslant x) = \left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}.}$$

(12) Étudions pour x fixé la limite quand n tend vers $+\infty$ de $K_n(x)$. Nous avons

$$\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right)}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-x}}{n} = 0$, avec l'équivalent $\ln\left(1+h\right) \underset{h\to 0}{\sim} h$ il vient

$$\ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{e^{-x}}{n}\right)$$

puis

$$-n\ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n \cdot \left(\frac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}.$$

Nous avons donc $\lim_{n\to+\infty} -n\ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$ et en composant par l'exponentielle on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} K_n(x) = e^{-e^{-x}}.$$

(13) Il reste à savoir si la fonction K définie sur $\mathbb{R}$ par $K(x) = e^{-e^{-x}}$ est bien une fonction de répartition. On vérifie facilement que la fonction K est croissante, continue et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $\lim_{x\to-\infty} K(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} K(x) = 1$. Ceci prouve que K est la fonction de répartition d'une variable à densité. Une densité est donnée par

$$x \mapsto e^{-x}e^{-e^{-x}}.$$

Problème 2 (*Facultatif)

Ce problème n'ayant pas rencontré le succès escompté, la solution sera proposée oralement pour ceux qui l'ont travaillé.

Exercice sous SciLab

On rappelle que la commande `grand(1, N, 'exp', lam)` permet de générer un échantillon de taille N dont les composantes représentent des réalisations de variables aléatoires indépendantes de même loi normale $\mathcal{E}(\texttt{lam})$.

On considère une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et la variable $y = \lfloor X \rfloor$.

(1) La partie entière, sous `SciLab` s'obtient à l'aide de l'instruction `floor`. Il suit qu'il fallai compléter:

```
X=grand(1, 1000, 'exp', 1);
Y=floor(X);
```

(2) On obtient une valeur approchée de la moyenne avec l'instruction `mean()` et de la variance soit avec le carrée de l'écart-type (obtenu avec l'instruction `stdev()`) soit encore avec l'instruction `mean()` et la définition de la variance, ce qu'on propose ici

```
m=mean(Y);
v=mean((Y-m).^2);
```

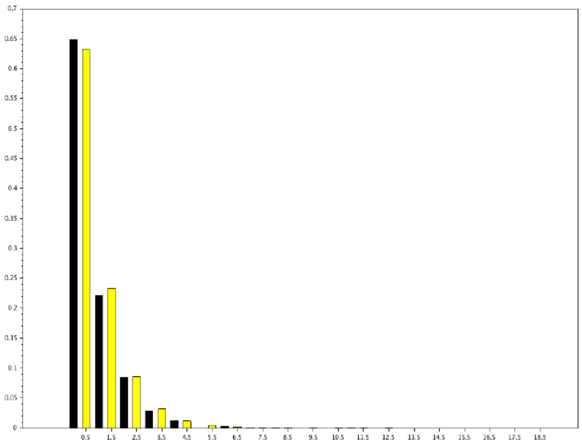
On constate que `SciLab` renvoie

```
--> m=
0.5865
--> v=
0.881775
```

(3) On complète:

```
U=tabul(Y , 'i') ;
bar(U(:, 1), U(:, 2)/1000, 0.3, 'black')
```

(4) On recopie dans la console `SciLab` et on exécute les instructions du texte. On obtient la figure ci-dessous



Il s'agit des diagrammes à bâtons des fréquences (empiriques) de la loi Y et des valeurs théoriques d'une variable G telle que $G+1$ est géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-1}$. on retrouve donc un résultat vu dans un sujet de **EDHEC 2002**

$$Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - e^{-1}).$$

En particulier, le cours donne l'espérance de la loi géométrique, ainsi

$$E(Y+1) = \frac{1}{(1 - e^{-1}} \simeq 1.58$$

ce qui, par linéarité de l'espérance devrait conduire théoriquement à $E(Y) \simeq 0.58$, ce qu'on a obtenu de manière empirique précédemment.