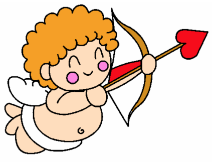
ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com



Devoir Maison n°8

À rendre le 13/02

Problème

Partie I - Réduction

On considère la matrice carrée réelle d'ordre 3

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

et on note φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice est A, dans la base canonique notée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

(1) Déterminer le noyau et l'image de φ. En déduire que 0 est valeur propre de φ.

(2) (a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.
(b) Vérifier que 4 et 6 sont deux valeurs propres de φ et déterminer les sous espaces propres associés.
(c) On introduit les vecteurs

$$u_1 = -e_1 + e_2 + 2e_3, \quad u_2 = e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad u_3 = e_1 - e_2 + e_3.$$

Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer la matrice A' de φ dans cette base.

(3) Soient α, β et γ trois nombres réels non nuls et P la matrice définie par : $P = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ 2\alpha & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

(a) Montrer en utilisant la question précédente que P est inversible.
(b) On rappelle que pour toute matrice $A = (a_{i,j})$, on appelle transposée de A, la matrice notée ${}^tA$ défnie par ${}^tA = (a_{j,i})$, c'est à dire obtenue en permutant les lignes et les colonnes de A. Calculer le produit $P \cdot {}^tP$ et en déduire l'existence de valeurs de α, β et γ telles que ${}^tP = P^{-1}$. On se placera dans cette situation dans la suite de l'exercice.
(c) Justifier que $A = P \cdot A' \cdot {}^tP$.

Partie II - Fonctions de plusieurs variables

Soient x, y et z trois réels, on définit les matrices colonnes et lignes respectives

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad {}^tX = (x, y, z)$$

et on pose

$$g(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + 4xz - 4yz + 2z^2.$$

(4) (a) Montrer que : ${}^tX \cdot A \cdot X = g(x, y, z)$
(b) Montrer que la transposée de la matrice $({}^tP \cdot X)$ est $({}^tX \cdot P)$.
(c) En déduire que

$$g(x, y, z) = 4y'^2 + 6z'^2, \qquad \text{où on a posé} \quad {}^tP.X = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

(5) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = g(x, y, y^2), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Expliciter $f(x, y)$ et justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
(b) Déterminer les points critiques de f.
(c) Former la matrice hessienne en chacun des points critiques précédents. Que peut-on conclure quant à la nature de ces points critiques?
(d) Montrer en utilisant la question **(4)(c)** que $(0, 0)$ est un minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.
(e) Compléter le programme `SciLab` permettant d'obtenir la représentation graphique de f sur $[-4; 4]^2$, que l'on pourra contempler avec admiration.

```
function z=f(x,y)
    z=...................
endfunction

x=...................
y=...................
z=feval(x,y, f)

plot3d(................)
```

Exercice

Jean-Michel Charcuterie vend des saucissons sur le marché, le samedi matin. Il propose au choix deux type de friandises, le saucisson au poivre (que l'on notera A) et le saucisson aux truffes (noté B) et il dispose d'un stock de 40 exemplaires de A et 40 exemplaires de B. Chaque client demande soit A, soit B avec la probabilité $0,5$. Les demandes des clients sont indépendantes les unes des autres. Un samedi, 60 clients se présentent. On note x la probabilité de l'événement "Jean-Mi ne satisfait pas à toutes les demandes, cette matinée".

(1) Déterminer la loi de Y, nombre de clients demandant le poivre dans la matinée.
(2) Exprimer x à l'aide de Y .
(3) Déduire de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev un majorant de x.