ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir Maison n°9

Cahier de vacances d'Hiver
À rendre le 04/03

Exercice 1

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et x et y deux réels de l'intervalle $]0;1[$. On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,x)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,y)$ et on définit ensuite la variable aléatoire Z en posant

$$Z = 2n - X - Y.$$

(1) On introduit aussi la variable aléatoire W définie par $W = XYZ$. Montrer que l'espérance de W est donnée par

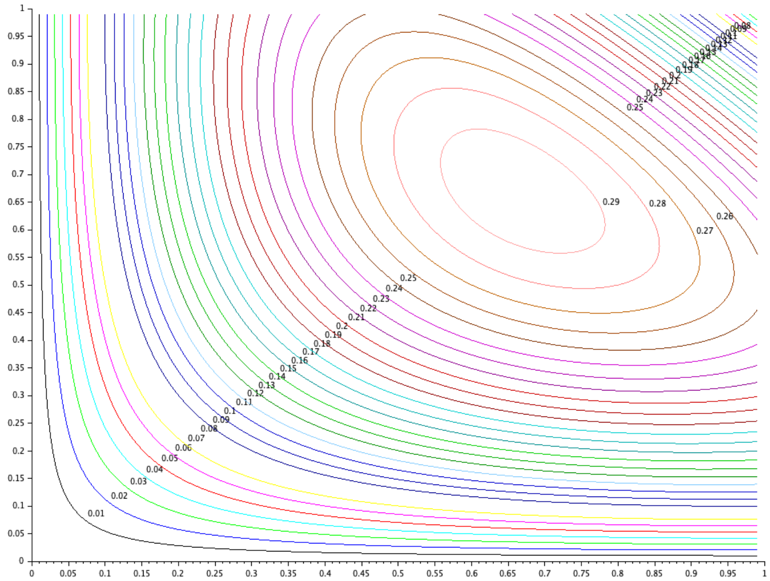
$$E(W) = n^2(n-1)xy(2-x-y).$$

(2) On pose $D =]0;1[\times]0;1[$. On admet que D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et on définit, pour $(x,y) \in D$, la fonction f par

$$f(x,y) = xy(2-x-y).$$

- (a) Représenter graphiquement le domaine D.
- (b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.
- (c) Montrer qu'il existe un unique point A de D où f est susceptible de présenter un extremum.
- (d) Montrer que f présente bien un extremum local en A. Préciser sa nature et sa valeur.
- (e) Le script `SciLab` suivant donne la représentation ci-dessous. Est-ce cohérent avec l'étude précédente? Expliquer.

```
function z=f(x,y)
    z=x*y*(2-x-y)
endfunction

x=0.01:.01:.99
y=x;
contour(x,y,f,[0:.01:0.3])
```



(f) Quelles commandes pourrait-on ajouter au script précédent pour représenter la surface de f sur D?

(g) Calculer

$$\frac{1}{4}\left(y-\frac{2}{3}\right)^2\left(y-\frac{8}{3}\right)-y\left(x+\frac{1}{2}y-1\right)^2.$$

(h) En déduire que l'extremum local trouvé précédemment est finalement un extremum global.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

(1) (a) Étudier, suivant la parité de n, le tableau de variations de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^{n+1} + x^n.$$

(b) Montrer que dans tous les cas

$$f_n\left(-\frac{n}{n+1}\right) < 2.$$

(c) Calculer $f_n(1)$ et en déduire, suivant la parité de n, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x

$$x^{n+1} + x^n = 2.$$

(2) On considère la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Justifier que A est diagonalisable.

(b) Déterminer une matrice D diagonale (dont les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissante) et une matrice P inversible (dont la première ligne est composée de 1) telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

(3) On considère l'équation matricielle d'inconnue X matrice carrée de taille 2

$$(E_n) \quad X^{n+1} + X^n = A.$$

(a) En posant $Y = P^{-1}XP$, montrer que X solution de (E_n) est équivalent à Y solution de

$$(E'_n) \quad Y^{n+1} + Y^n = D.$$

(b) Soit Y une solution de (E'_n). On pose

$$Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

(i) Montrer que, si Y solution de (E'_n), alors Y et D commutent.
(ii) En déduire que $b = c = 0$.
(iii) Quelle sont les valeurs possibles de a?
(iv) Discuter, suivant les valeurs de n, le nombre de solutions de l'équation (E_n).

(c) On note α la solution négative de l'équation numérique $x^4 + x^3 = 2$. Déterminer les solutions de l'équation (E_3) à l'aide de α.

Problème 1

On considère la fonction f définie pour tout x réel par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } x \in [-1;1] \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [-1;1] \end{cases}$$

(1) (a) Calculer $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. En déduire sans calcul $\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.
(b) Vérifier que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

On considère dorénavant une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$, et admettant f comme densité.

(2) (a) Établir l'existence de l'espérance de X, puis donner sa valeur.
(b) Établir l'existence de la variance de X, puis donner sa valeur.

(3) Montrer que la fonction de répartition de X, notée F_X , est définie par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2} + x + \dfrac{x^2}{2}, & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2}, & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$. On note F_Y sa fonction de répartition.

(4) (a) Donner la valeur de $F_Y(x)$ lorsque x est strictement négatif.
(b) Pour tout réel x positif ou nul, exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction F_X.

(c) En déduire qu'une densité de Y est la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} 2(1-x), & \text{si } x \in [0;1] \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [0;1] \end{cases}$$

(d) Montrer que Y possède une espérance et une variance et les déterminer.

(5) On considère deux variables aléatoires U et V, elles aussi définies sur $(\Omega;\mathcal{A};P)$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0;1]$.
On pose $I = \min(U,V)$. On **admet** que I est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega;\mathcal{A};P)$ et on note F_I la fonction de répartition de I.

(a) Expliciter $F_I(x)$ pour tout réel x.
(b) En déduire que I suit la même loi que Y.
(c) Compléter la déclaration de fonction `SciLab` suivante pour qu'elle simule la loi de Y .

```
function Y=DM9()
    U=............
    V=............
    if ............. then
        Y=..........
    else
        Y=..........
    end
endfunction
```

(6) On considère plus généralement n variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$ (où $n \geq 2$), toutes définies sur $(\Omega;\mathcal{A};P)$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0;1]$. On pose $I_n = \min(X_1, X_2, ..., X_n)$.

(a) Déterminer la fonction de répartition de I_n.
(b) Montrer que la suite de (I_n) converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Problème 2

Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimité de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre $2, 4, 1, 5, 9$, alors on obtient : $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

(1) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.

(2) (a) Déterminer $T_n(\Omega)$.

(b) Calculer $P(T_n = 1)$.

(c) Montrer que :

$$P(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

(3) Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.

(4) Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3. Vérifier que $E(T_3) = \dfrac{16}{9}$.

Partie B

(5) Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

(6) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

(a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1}.

(b) En utilisation un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer alors que :

$$\forall i \in [\![k+1, n]\!],\ P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j).$$

(7) (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres :

$$\binom{j-1}{k-1}, \quad \binom{j-1}{k}, \quad \text{et} \quad \binom{j}{k}.$$

(b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

(c) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :

$$\forall i \in [\![k, n]\!],\ P(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1}.$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.

(8) (a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les événements: $[T_n > k]$ et $[S_k \leq n-1]$.

(b) En déduire que

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(T_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}.$$

(9) Démontrer que $E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k)$, puis que $E(T_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$.

(10) Calculer $\lim_{n \to +\infty} E(T_n)$.

Partie C

Dans cette partie, on fait varier l'entier n et on étudie la convergence en loi de la suite de variable (T_n) obtenue.

(11) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(Y = k) = \frac{k-1}{k!}.$$

(a) Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = k) = 1$.

(b) Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.

(12) Pour tout entier naturel k non nul, démontrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} P(T_n > k) = \frac{1}{k!}.$$

(13) Démontrer alors que (T_n) converge en loi vers la variable aléatoire Y.

(14) On rappelle qu'en langage `SciLab`, l'instruction `grand(1,1,'uin',1,n)` renvoie un entier aléatoire de $[\![1, n]\!]$. Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument le nombre n de boules contenues dans l'urne, afin qu'elle simule la variable aléatoire T_n:

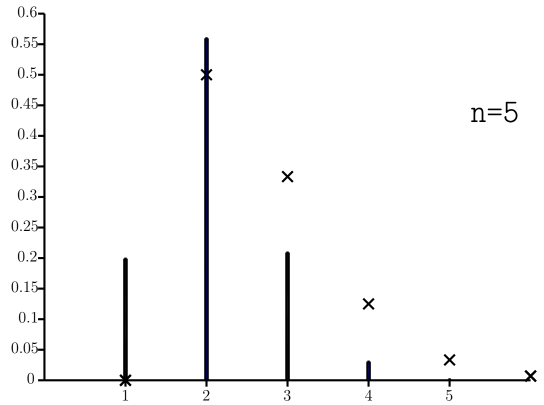
```
function y=T(n)
S=......................
y=......................
while .................
    tirage=grand(1,1,'uin',1, n)
    S=S+tirage
    y=..................
end
endfunction
```

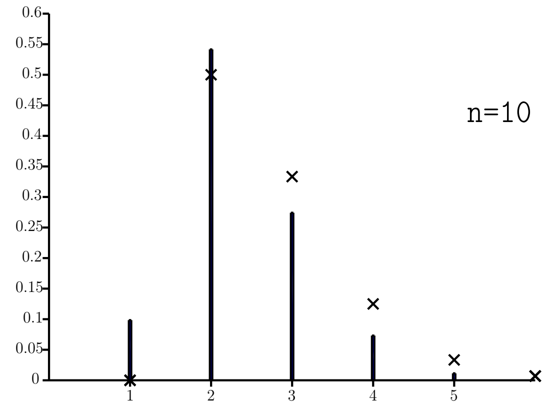
(15) On suppose déclarée la fonction précédente et on écrit le script ci-dessous :

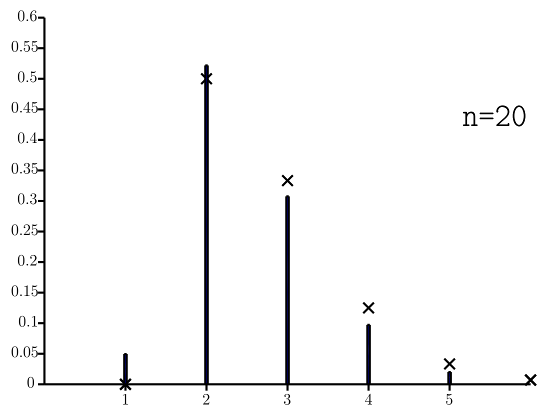
```
function y=freqT(n)
    y = zeros(1,n)
    for i=1:100000
        k = T(n)
        y(k) = y(k)+1
    end
    y = y/100000
endfunction

function y=loitheoY(n)
    y = zeros(1,n)
    for k=1:n
        y(k) = (k-1)/prod(1:k)
    end
endfunction
```

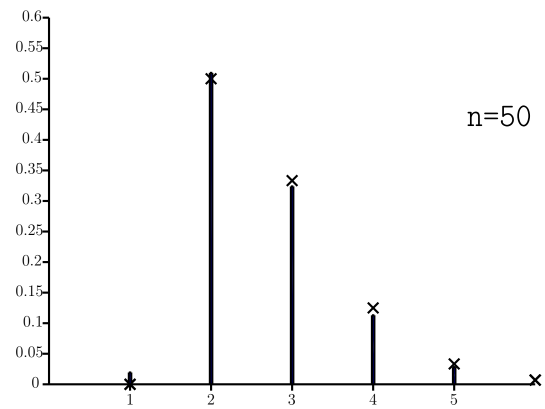
```
clf()
n = input('n=?')
plot2d(loitheoY(6),style=-2)
x = freqT(n)
bar(x(1:5))
```

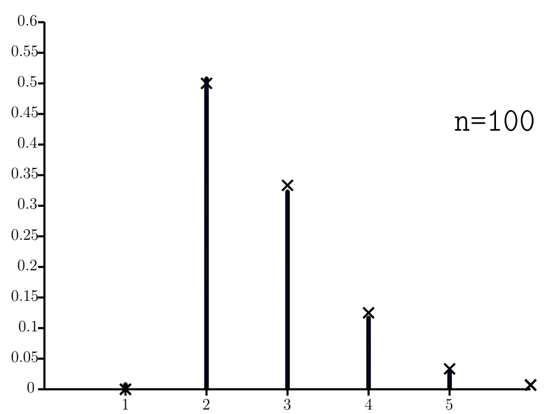
L'exécution de ce script pour les valeurs de n indiquées a permis d'obtenir les graphes ci-dessous:

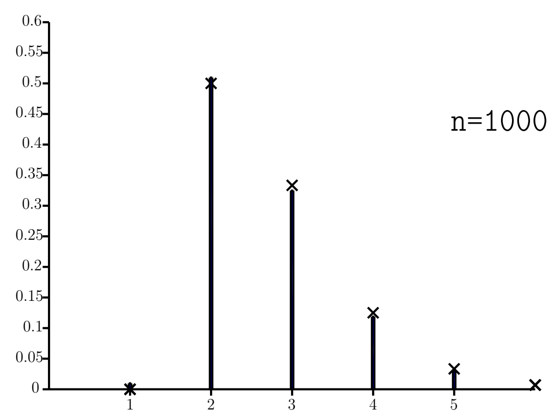












(a) Expliquer ce que représentent les vecteurs renvoyés par les fonctions `freqT` et `loitheoY`. Comment ces vecteurs sont-ils représentés graphiquement dans chaque graphique obtenu ?

(b) Expliquer en quoi cette succession de graphiques permet d'illustrer le résultat de la question 13.