ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir de rentrée

Durée: 2 heures

Questions de cours

(1) Montrer que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$: $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

(2) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Exercice 1

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

Partie I : Étude de la fonction f

(1) Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

(2) Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

(3) Montrer de plus que$b \in [2;4]$. On donne $\ln(2) \simeq 0,7$.

Partie II : Étude d'une suite

On pose $u_0 = 4$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$. Et on note, pour $x > 0$, $\varphi(x) = \ln(x) + 2$.

(1) Montrer que $\varphi([b;+\infty[) \subset [b;+\infty[$ et que pour tout $x \in [b;+\infty[$,

$$|\varphi'(x)| \leqslant \frac{1}{2}.$$

(2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [b, +\infty[$.

(3) Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

(4) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b).$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

(5) (a) Écrire une fonction `Scilab` d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

(b) Recopier et compléter la ligne `(3)` de la fonction `SciLab` suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
(1) function b = valeur_approchee(epsilon)
(2) n = 0
(3) while ..................
(4)     n = n+1
(5) end
(6) b = suite(n)
(7) endfunction
```

Exercice 2

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) (a) Trouver les 3 valeurs de λ telles que $A - \lambda I$ ne soit pas inversible.
Pour chacune de ces valeurs, résoudre le système $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

(c) On note D la matrice définie par $D = P^{-1}AP$. Montrer que D est une matrice diagonale.

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ En déduire une expression explicite de A^n en fonction de n.

(2) On se propose de résoudre l'équation $M^2 = A$, d'inconnue M, matrice carrée d'ordre trois.
Soit M une matrice carrée d'ordre trois. On note $N = P^{-1}M\ P$.

(a) Montrer wue $M^2 = A \iff N^2 = D$.

(b) Établir que, si $N^2 = D$, alors $N\ D = D\ N$.

(c) En déduire que, si $N^2 = D$, alors N est diagonale.

(d) Déterminer toutes les matrices diagonales N telles que $N^2 = D$. On note N_0 la solution dont les coefficients sont positifs ou nuls.

(e) En déduire la solution B associée à N_0.