ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir surveillé n°1

Durée: 4 heures

Questions de cours

(1) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Écrire, en langage `SciLab` une fonction d'en-tête `function res=u(n)` qui prend en argument un entier n et renvoie la valeur de u_n.

(2) Trouver une relation, et la justifier, de *négligeablité*, en $+\infty$, entre les quantités

$$\frac{1}{\sqrt{x}e^x}, \quad \text{et} \quad e^{-2x}\left(1 - e^{-x^2/2}\right)^5.$$

Exercice 1

Partie 1 : Études de deux fonctions

(1) Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x).$$

(a) Montrer que la fonction N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$.
(b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a : $\ln(1-x) \leq -x$.
(c) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a : $N'(x) \leq 0$.
(d) En déduire le signe de N sur l'intervalle $[0, 1[$.

(2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-2(x + \ln(1-x))}{x^2}, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$.
(b) En déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$.
(c) En déduire que la fonction f est continue sur $[0, 1[$.
(d) Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et que pour tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$f'(x) = -2\frac{N(x)}{x^3(1-x)}.$$

☞ On **admet** qu'au voisinage de 0, on a : $\ln(1-x)+x+\dfrac{x^2}{2}\sim -\dfrac{x^3}{3}$.

(e) Montrer alors que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=2/3$.
(f) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,1[$, limites comprises.
(g) Tracer soigneusement l'allure de la courbe représentative de la fonction f. On donnera l'équation de la tangente en 0 et on la tracera.
(h) À l'aide de la formule de Taylor en 0 au rang 3 donnée ci-dessous, que l'on admet être licite pour une fonction φ de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0, démontrer l'équivalence admise ci-dessus.

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\varphi'(0)x+\frac{\varphi''(0)}{2!}x^2+\frac{\varphi'''(0)}{3!}x^3+o(x^3).$$

Partie 2 : Résolutions d'équations

(4) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution, notée u_n sur $[0,1[$. Donner la valeur de u_1.
(5) L'équation $f(x)=x$ admet-elle une solution sur $[0,1[$?

Exercice 2

Partie 1 : Relations entre matrices.

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

$$J=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

(1) Calculer P^2 puis en déduire que P est inversible et la valeur de P^{-1}.
(2) Montrer que $P^{-1}\cdot J\cdot P$ et $P^{-1}\cdot K\cdot P$ sont diagonales.
(3) Soient α et β deux réels fixés. Déduire de la question précédente une matrice diagonale $D(\alpha,\beta)$ (dépendant donc de α et β) telle que $\alpha J+\beta K=P\cdot D(\alpha,\beta)\cdot P^{-1}$.

Partie 2 : Étude d'un mouvement aléatoire.

Dans cette partie, p désigne un réel de $[0,1/2[$.

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4, le sommet 4 au sommet 1, les diagonales reliant le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.

Un pion se déplace sur les sommets du carré selon le protocole suivant:

- Le pion est sur le sommet 1 au départ.
- Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet du carré, il se déplace à l'instant suivant vers un sommet voisin (relié par un côté) avec la probabilité p ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité $1-2p$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire qui vaut i ($i\in[\![1;4]\!]$) si le mobile se trouve sur le sommet numéro i après le $n-$ième déplacement.

On note

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}.$$

(4) Que vaut U_0? Déterminer U_1.

(5) Déterminer une matrice A telle que, pour tout $n \geq 2$, on ait $U_{n+1} = AU_n$. Vérifier que cette égalité a lieu pour $n = 0$ et $n = 1$.

(6) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$U_n = A^n U_0.$$

(7) Vérifier que A s'écrit comme combinaison linéaire de J et K. (i.e qu'il existe des réels α et β telq que $A = \alpha J + \beta K$).

(8) En déduire que

$$U_n = \frac{1}{4} P \cdot D\left(p, 1 - 2p\right)^n PC_0,$$

où $D\left(p, 1 - 2p\right)$ est la matrice trouvée au 3 puis donner l'expression de U_n en fonction de n, pour tout $n \geq 1$.

Partie 3 : Simulation informatique

(10) Compléter la fonction `SciLab` suivante pour qu'elle renvoie une *trajectoire* de (X_n), c'est à dire une liste dont les composantes sont des simulations de $X_0, X_1, ..., X_n$, où n est en argument de la fonction à compléter.

```
function U=mouvement(n,p)
U=zeros(1,n+1);
U(1)=................................
for k=1:n
    r=rand();
    if U(k)==1 then
        if r<p then
            U(k+1)=2
        else
            if r<2*p then
            U(k+1)=4
            else
            U(k+1)=3
            end
        end
    end
    if U(k)==2 then
        if r<p then
            U(k+1)=..................
        else
            if r<2*p then
            U(k+1)=...................
            else
            U(k+1)=....................
            end
        end
    end
```

```
        if U(k)==3 then
            if r<p then
                U(k+1)=.....................
            else
                if r<2*p then
                U(k+1)=......................
                else
                U(k+1)=1
                end
            end
        end
        if ....................... then
            if ............... then
                U(k+1)=1
            else
                if ............... then
                U(k+1)=3
                else
                U(k+1)=2
                end
            end
        end
        end
    endfunction
```

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.

Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de *Pile* obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.
Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque *Pile* obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque *Pile* obtenu.

En particulier, s'il n'obtient aucun *Pile*, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir *Pile* est égale à p ($p \in]0, 1[$), et celle d'obtenir *Face* est de $1 - p$.
On notera X la variable aléatoire égale au nombre de *Pile* obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Enfin, on notera A l'événement : "le joueur est déclaré vainqueur" et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

Partie I

Dans cette partie et dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 3$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

(1) Reconnaître la loi de X et vérifier que $P(A) = 13/27$.
(2) Montrer que $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G.

(3) Calculer l'espérance de G. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est entier naturel non nul et $p \in]0,1[$.

Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant "À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants !", et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.

Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = (-1)^X$.
Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

(4) (a) On note $Z = (Y+1)/2$. Déterminer $Y(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.
(b) Démontrer que $E(Y) = 2P(A) - 1$.

(5) (a) Donner la loi de X.
(b) En déduire que l'on a également

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

puis que $E(Y) = (1-2p)^n$.

(6) Exprimer alors la valeur de $P(A)$ en fonction de n et p.

(7) Démontrer que

$$P(A) \geq \frac{1}{2} \iff \left[p \leq \frac{1}{2} \text{ OU "}n\text{ est pair"} \right]$$

Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est à dire en faisant en sorte que $P(A) \geq 1/2$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est à dire que $E(G) \leq 0$).

(8) Exprimer G en fonction de X et Y. En déduire que

$$E(G) = 10 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k P(X = k).$$

(9) Démontrer que :

$$\forall k \in [\![1; n]\!], \quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

(10) Montrer que $E(G) = -10np(1-2p)^{n-1}$

(11) Démontrer alors que :

$$\begin{cases} P(A) \geq \dfrac{1}{2} \\ E(G) \leq 0 \end{cases} \iff p \leq \frac{1}{2}$$

(12) (a) Étudier la fonction f définie sur $[0; 1/2]$ par $f(x) = x(1-2x)^{n-1}$.
(b) Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est à dire quelle valeur doit-il donner à $p \in [0; 1/2]$) pour optimiser la rentabilité de son activité?