Devoir surveillé n°1

Solution

Questions de cours

(1) C'est un programme ultra-classique (d'où sa présence ici) que l'on a de plus vu dans le premier TP. C'est donc sans difficulté que l'on écrit la fonction suivante

```
function res=u(n)
    res=1 // initialisation u_0=1
    for k=2:n
        res = res + 1/res
    end
endfunction
```

(2) On essaie de calculer la limite du quotient des deux quantités à comparer. Remarquons (même si ici ce n'est pas nécessaire pour obtenir la limite désirée) que, comme

$$e^{-x^2/2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

on a

$$\left(1-e^{-x^2/2}\right)^5 \underset{x\to+\infty}{\sim} -5e^{-x^2/2}.$$

Il suit que

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}e^x}}{e^{-2x}\left(1-e^{-x^2/2}\right)^5} &= \frac{1}{e^{-3x}\sqrt{x}\left(1-e^{-x^2/2}\right)^5}\\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{5\sqrt{x}e^{-x^2/2-3x}}\\ &\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,\end{aligned}$$

par croissance comparée. Il suit que l'inverse de ce quotient tend vers 0, ce qui donne

$$e^{-2x}\left(1-e^{-x^2/2}\right)^5 = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}e^x}\right), \qquad x\to+\infty.$$

Exercice 1

Partie 1 : Études de deux fonctions

(1) Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x).$$

(a) On voit que

- La fonction $x \mapsto 1-x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ à valeur sur $\mathbb{R}_+^*$ car $x<1 \Longrightarrow 1-x>0$.
- La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc par composition, $x \mapsto \ln(1-x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
Finalement la fonction N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ comme somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.

(b) Posons $h : x \mapsto \ln(1-x) + x$.
h est dérivable sur $[0,1[$ et pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$h'(x) = \frac{-1}{1-x} + 1 = \frac{-x}{1-x} \leq 0 \qquad \text{car} \quad -x \leq 0 \;\text{ et }\; 1-x>0 \;\text{ sur }\; [0,1[$$

Donc la fonction h est décroissant sur $[0,1[$. Elle est donc majorée par $h(0)=0$.
Ainsi, pour tout $x \in [0,1[$, on a : $h(x) \leq 0$ soit

$$\forall x \in [0,1[, \qquad \ln(1-x) \leq -x.$$

(On aurait pu utiliser un argument de *convexité*. En effet, $x \mapsto \ln(1-x)$ est concave et sa courbe se situe au dessous de toutes ses tangentes, notamment $y=-x$, tangente en 0.)

(c) Pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$\begin{aligned} N'(x) &= 2x - 2 - 2\left[-\ln(1-x) + (1-x)\frac{-1}{1-x}\right] \\ &= 2x - 2 + 2\ln(1-x) + 2 \\ &= 2\left((x + \ln(1-x)\right) \leq 0 \end{aligned}$$

car d'après la question précédente, $\ln(1-x) \leq -x$ soit $x + \ln(1-x) \leq 0$ pour tout $x \in [0,1[$.
Finalement, on a

$$\forall x \in [0,1[, \qquad N'(x) \leq 0.$$

(d) D'après la question précédente, la fonction N est décroissant sur $[0,1[$. Elle est donc majorée par $N(0)=0$.
Ainsi, pour tout $x \in [0,1[$, on a bien $N(x) \leq 0$.

(2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} -2\dfrac{x + \ln(1-x)}{x^2,} & \text{si } 0<x<1 \\ 1, & \text{si } x=0 \end{cases}.$$

(a) Au voisinage de 0, on a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

donc

$$\ln(1-x) = -x - \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

(b) Au voisinage de 0, on a donc :

$$\begin{aligned} x + \ln(1-x) &= x - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

et donc

$$x + \ln(1-x) \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

On en déduit que au voisinage de 0^+ :

$$f(x) = -2\frac{x + \ln(1-x)}{x^2} \underset{x \to 0^+}{\sim} -2\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = 1$$

Ainsi, $f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} 1$ donc

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

(c) On a:

- La fonction f est continue sur $]0,1[$ comme quotient de fonction continues sur $]0,1[$ car $x^2 \neq 0$.
- De plus, $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0.

Ainsi, la fonction f est continue sur $[0,1[$.

(d) On a déjà vu que $x \mapsto \ln(1-x)$ est dérivable sur $]0,1[$.
Donc, la fonction f est dérivable sur $]0,1[$ comme quotient de fonction dérivable sur $]0,1[$ car $x^2 \neq 0$.
Pour tout $x \in]0,1[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\left[\frac{\left(1 + \frac{-1}{1-x}\right)x^2 - 2x\left(x + \ln(1-x)\right)}{x^4}\right] \\ &= -2\left[\frac{\frac{-x^3 - 2x(1-x)\left(x + \ln(1-x)\right)}{1-x}}{x^4}\right] \\ &= -2\left[\frac{-x^2 - 2(1-x)\left(x + \ln(1-x)\right)}{x^3(1-x)}\right] \\ &= -2\left[\frac{-x^2 - 2x(1-x) - 2(1-x)\ln(1-x)}{x^3(1-x)}\right] \\ &= -2\left[\frac{x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x)}{x^3(1-x)}\right] \\ &= -2\frac{N(x)}{x^3(1-x)} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in]0,1[$, on a

$$f'(x) = -2\frac{N(x)}{x^3(1-x)}.$$

(e) Calculons le taux d'accroissement de f en 0. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{-2\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}-1}{x} \\
&= \frac{-2x-2\ln(1-x)-x^2}{x^3} \\
&= -2\frac{\ln(1-x)+x+\dfrac{x^2}{2}}{x^3}
\end{aligned}$$

Or, on a admis qu'au voisinage de 0, on a

$$\ln(1-x)+x+\frac{x^2}{2} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{3}.$$

Ainsi, on obtient par quotient d'équivalents

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\sim} -2\frac{-\dfrac{x^3}{3}}{x^3} = \frac{2}{3}$$

Ainsi, f est dérivable en 0 et que $f'(0)=\dfrac{2}{3}$.

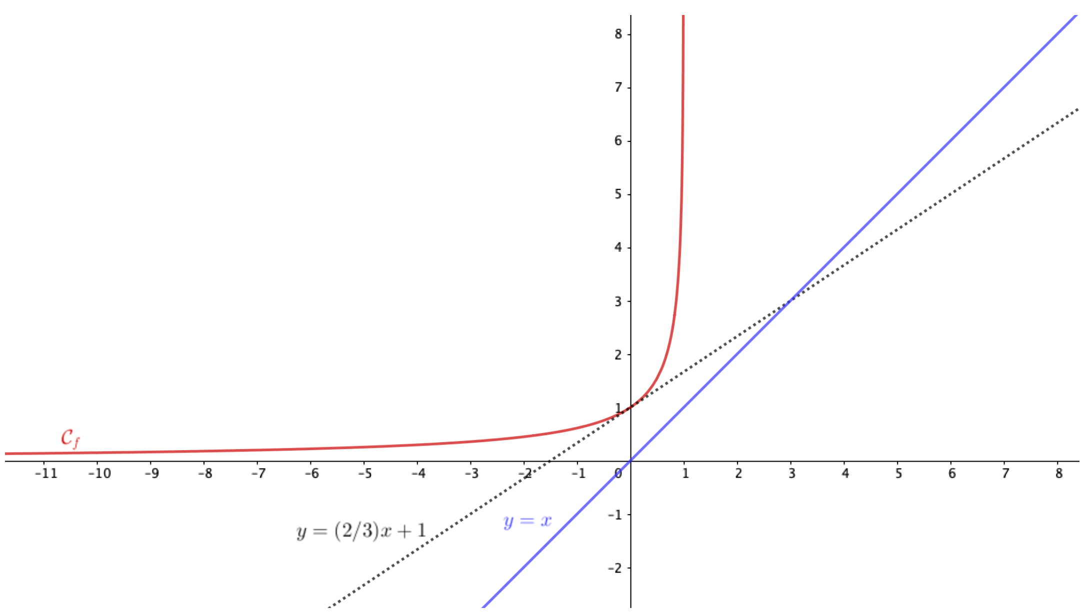
(f) On a :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ 1
$N(x)$	$-$
$x^3(1-x)$	$+$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$

car $\ln(1-x) \to -\infty, x \to 1^-$, donc par somme, quotient et produit de limites, on a $f(x) \to +\infty$, $x \to 1^-$.

(3) L'équation de la tangente en 0 est donnée par : $\quad y = f'(0)(x-0)+f(0)$, soit d'après les calculs précédents :

$$y = \frac{2}{3}x+1$$



(4) On applique la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 à la fonction $\varphi : x \mapsto \ln(1-x)$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0. On voit que

$$\begin{aligned}
\varphi(0) &= 0 \\
\\
\varphi'(x) &= \frac{-1}{1-x} \\
\varphi'(0) &= -1 \\
\\
\varphi''(x) &= \frac{-1}{(1-x)^2} \\
\varphi''(0) &= -1 \\
\\
\varphi'''(x) &= \frac{-2}{(1-x)^3} \\
\varphi'''(0) &= -2
\end{aligned}$$

Donc, au voisinage de 0,

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{6}x^3 + o(x^3) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

ou encore

$$\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{3}.$$

Partie 2 : Résolutions d'équations

(4) On sait que:

- La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0,1[$ donc elle réalise une bijection de $[0,1[$ sur $[1,+\infty[$ (d'après les calculs de limites plus haut).
- De plus, $n \in \mathbb{N}^*$ donc $n \in [1,+\infty[$.

Donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $u_n \in [0,1[$. Pour $n = 1$, comme $f(0) = 1$, on a $u_1 = 0$.

(5) Graphiquement, cette équation n'a pas de solution (tracer la droite $y = x$ sur le même graphique; il n'y a pas de point d'intersection).
Plus rigoureusement, d'après le tableau de variations, on a pour tout $x \in [0,1[$:

$$f(x) \geq 1$$

Mais comme $x < 1$, on obtient :

$$f(x) \geq 1 > x \quad \text{soit} \quad f(x) > x \quad \text{(inégalité stricte)}$$

Ainsi, l'équation $f(x) = x$ n'admet pas de solution sur $[0,1[$.

Exercice 2 - D'après EDHEC 2002

J'ai posé cet exercice en ECE 1, dans le cadre du DS 3 de l'année 2017/2018.

Partie 1 : Relations entre matrices.

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) On constate que $P^2 = 4I$ ce qui donne $P \cdot \frac{1}{4}P = I$ et donc P est inversible avec

$$P^{-1} = \frac{1}{4}P.$$

(2) On calcule les produits :

$$\begin{aligned} P^{-1} \cdot J \cdot P &= \frac{1}{4}P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^{-1} \cdot K \cdot P &= \frac{1}{4}P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D_2 \end{aligned}$$

sont bien diagonales.

(3) On a donc $P^{-1} \cdot J \cdot P = D_1$ et $J = P \cdot D_1 \cdot P^{-1}$ et $K = P \cdot D_2 \cdot P^{-1}$ donc

$$\alpha J + \beta K = \alpha P \cdot D_1 \cdot P^{-1} + \beta P \cdot D_2 \cdot P^{-1} = P \cdot (\alpha D_1 + \beta D_2) \cdot P^{-1}$$

et

$$D(\alpha, \beta) = \alpha D_1 + \beta D_2 = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha + \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

est bien diagonale.

Partie 2 : Étude d'un mouvement aléatoire.

Dans cette partie, p désigne un réel de $[0, 1/2[$.

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4, le sommet 4 au sommet 1, les diagonales reliant le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.

Un pion se déplace sur les sommets du carré selon le protocole suivant:

- Le pion est sur le sommet 1 au départ.

- Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet du carré, il se déplace à l'instant suivant vers un sommet voisin (relié par un côté) avec la probabilité p ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité $1-2p$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire qui vaut i ($i \in [\![1;4]\!]$) si le mobile se trouve sur le sommet numéro i après le $n-$ième déplacement.

On note
$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}.$$

(4) Comme, au départ, le pion est sur le sommet n°1, on a $P(X_0 = 1) = 1$ et $P(X_0 = 2) = P(X_0 = 3) = P(X_0 = 4) = 0$ ou encore
$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Au moment $n = 1$, partant du sommet n°1, le pion a une probabilité p d'être sur le sommet n°2 ou n°4 (sommets voisins) et une probabilité $1-2p$ d'être sur le sommet n°3 (sommet opposé). La probabilité est nulle de rester sur le sommet n°1. Donc
$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 1-2p \\ p \end{pmatrix}$$

(5) On admet[1] que, pour $n \geq 2$, $\{(X_n = k) : \ k \in [\![1;4]\!]\}$ forme un système complet d'évènements. En lui appliquant la formule des probabilités totales et en utilisant les règles de déplacements décrites ci-dessus pour exprimer les probabilités conditionnelles ci-dessous, on obtient
$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 1) + P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 2) + \\ &\quad + P_{X_n=3}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 3) + P_{X_n=4}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 4) \\ &= 0 \times P(X_n = 1) + p \times P(X_n = 2) + (1-2p) \times P(X_n = 3) + p \times P(X_n = 4) \\ &= pP(X_n = 2) + (1-2p)P(X_n = 3) + pP(X_n = 4). \end{aligned}$$
Le même raisonnement donne
$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 2) &= pP(X_n = 1) + pP(X_n = 3) + (1-2p)P(X_n = 4) \\ P(X_{n+1} = 3) &= (1-2p)P(X_n = 1) + pP(X_n = 2) + pP(X_n = 4) \\ P(X_{n+1} = 4) &= pP(X_n = 1) + (1-2p)P(X_n = 2) + pP(X_n = 3). \end{aligned}$$
Utilisant les règles du produit matriciel, on trouve sans difficulté que $U_{n+1} = AU_n$ où
$$A = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-2p & p \\ p & 0 & p & 1-2p \\ 1-2p & p & 0 & p \\ p & 1-2p & p & 0 \end{pmatrix}.$$
On vérifie que l'égalité matricielle a bien lieu pour $n = 0$ et $n = 1$. Pour $n = 0$, on a bien
$$\begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 1-2p \\ p \end{pmatrix} = U_1 = A = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-2p & p \\ p & 0 & p & 1-2p \\ 1-2p & p & 0 & p \\ p & 1-2p & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = AU_0.$$

[1] Pour être totalement rigoureux, il faudrait faire une récurrence pour montrer que $X_n(\Omega) = [\![1;4]\!]$ pour $n \geq 2$ car ce n'est pas automatique. C'est rarement demandé, sauf en 2017.

Pour $n = 1$, on doit vérifier que $U_2 = AU_1$. On doit d'abord déterminer U_2. Attention, $\{(X_1 = 1), (X_1 = 2), (X_1 = 3), (X_1 = 4)\}$ n'est pas un s.c.e (ce qui précise la remarque en bas de page précédente), car on sait que $(X_1 = 1) = \emptyset$ (évènement impossible). En revanche, $\{(X_1 = 2), (X_1 = 3), (X_1 = 4)\}$ est un s.c.e. En lui appliquant la formule des probabilités totales, comme précédemment, on trouve

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1) &= P_{X_1=2}(X_2 = 1)P(X_1 = 2) + P_{X_1=3}(X_2 = 1)P(X_1 = 3) + P_{X_1=4}(X_2 = 1)P(X_1 = 4) \\ &= p^2 + (1-2p)^2 + p^2 \end{aligned}$$

$$P(X_2 = 2) = 2p(1-2p)$$

$$P(X_2 = 3) = 2p^2$$

$$P(X_2 = 4) = 2p(1-2p)$$

et on a bien

$$U_2 = \begin{pmatrix} p^2 + (1-2p)^2 + p^2 \\ 2p(1-2p) \\ 2p^2 \\ 2p(1-2p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-2p & p \\ p & 0 & p & 1-2p \\ 1-2p & p & 0 & p \\ p & 1-2p & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 1-2p \\ p \end{pmatrix} = AU_1.$$

(6) C'est une récurrence très facile. Pour $n = 0$, on a trivialement $u_0 = A^0 U_0 = IU_0 = U_0$. Si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n = A^n U_0$, alors, par la question précédente

$$U_{n+1} = AU_n = A \cdot A^n U_0 = A^{n+1} U_0,$$

et la récurrence est terminée.

(7) On voit immédiatement que

$$A = pJ + (1-2p)K.$$

(8) Par la première partie, on peut alors déduire que

$$A = PD(p, 1-2p)P^{-1}.$$

Une récurrence immédiate, combinée au fait que $P^{-1} = (1/4)P$ mène alors à

$$A^n = pD(p, 1-2p)^n P^{-1} = \frac{1}{4} PD(p, 1-2p)^n P.$$

Comme, par la question précédente, $U_n = A^n U_0$, on a bien

$$U_n = \frac{1}{4} P \cdot D\left(p, 1-2p\right)^n PU_0,$$

et on peut écrire

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-4p)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2p-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2p-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et on a finalement

$$U_n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + (1-4p)^n + 2\left(2p-1\right)^n \\ 1 - (1-4p)^n \\ 1 + (1-4p)^n - 2\left(2p-1\right)^n \\ 1 - (1-4p)^n \end{pmatrix}.$$

Partie 3 : Simulation informatique

(10) Les lois de déplacement apparaissent clairement dans le programme à compléter. Selon le sommet sur lequel on est, on se déplace avec probabilité p sur celui de droite (donc si `rand()<p`), avec probabilité p sur celui de gauche (ce qui correspond à `p<= rand() < 2*p`) et sinon sur celui diamétralement opposé (ce qui correspond à `rand()>=2*p`).

```
function U=mouvement(n,p)
U=zeros(1,n+1);
U(1)=1 // pour n=0, le mobile est au sommet numéro 1
for k=1:n
    r=rand();
    if U(k)==1 then
        if r<p then
            U(k+1)=2
        else
            if r<2*p then
            U(k+1)=4
            else
            U(k+1)=3
            end
        end
    end
    if U(k)==2 then
        if r<p then
            U(k+1)=3
        else
            if r<2*p then
            U(k+1)=1
            else
            U(k+1)=4
            end
        end
    end
    if U(k)==3 then
        if r<p then
            U(k+1)=4
        else
            if r<2*p then
            U(k+1)=2
            else
            U(k+1)=1
            end
        end
    end
    if U(k)==4 then
        if r<p then
            U(k+1)=1
        else
            if r<2*p then
```

```
            U(k+1)=3
            else
            U(k+1)=2
            end
        end
    end
    end
endfunction
```

Exercice 3 - D'après ECRICOME 2018

Soit n un entier naturel non nul.

Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de *Pile* obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.
Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque *Pile* obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque *Pile* obtenu.

En particulier, s'il n'obtient aucun *Pile*, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir *Pile* est égale à p ($p \in]0,1[$), et celle d'obtenir *Face* est de $1-p$.
On notera X la variable aléatoire égale au nombre de *Pile* obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Enfin, on notera A l'événement : "le joueur est déclaré vainqueur" et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

Partie I

(1) Á chacun des trois lancers, on a une probabilité $p = 2/3$ d'obtenir *Pile* - que l'on identifie comme succès - (et $1/3$ pour l'alternative contraire), on reconnait en X une loi binomiale
$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(3, 2/3).$$

(2) On voit que
$$P(A) = P([X=0] \cup [X=2]) = P([X=0]) + P([X=2]) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{1+3\times 4}{3^3} = \frac{13}{27}.$$

(3) Pour chaque valeur de X, on a une valeur différente de G. Si $X=0$, alors $G=0$, si $X=1$, alors on perd 10 euros et $G=-10$, si $X=2$, alors on gagne 20 euros et $G=20$. Enfin, si $X=3$, on perd 30 euros et $G=-30$. Au final,
$$G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}.$$

(4) On calcule l'espérance
$$\begin{aligned}
E(G) &= -30P(G=-30) - 10P(G=-10) + 20P(G=20) \\
&= -30P(X=3) - 10P(X=1) + 20P(X=2) \\
&= -30\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 10\times 3\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 20\times 3\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3} \\
&= \frac{-60}{27} = -\frac{20}{9}
\end{aligned}$$
On trouve donc que $E(G) < 0$ et le jeu est défavorable au joueur.

Partie II

(1) (a) Si $Y=1$, alors $Z=1$. Si $Y=-1$, alors $Z=0$. On a bien $Z(\Omega)=\{0;1\}$. De plus,
$$P(Z=1)=P(Y=1)=P(X\in 2\mathbb{N})=P(A),$$
et on a bien $Z\hookrightarrow \mathcal{B}(P(A))$.

(b) D'après la question précédente, $E(Z)=P(A)$ et $Y=2Z-1$. Par linéarité de l'espérance, on a donc
$$E(Y)=E(2Z-1)=2E(Z)-1=2P(A)-1.$$

(2) (a) Comme précédemment, $X\hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

(b) D'après le théorème de transfert
$$\begin{aligned} E(Y) &= E((-1)^X)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k P(X=k)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$
On utilise alors la formule du binôme
$$E(Y)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-p)^k(1-p)^{n-k}=(-p+1-p)^n=(1-2p)^n.$$

(3) D'après les questions 1b. et 2b., on a
$$(1-2p)^n=E(Y)=2P(A)-1\Longleftrightarrow P(A)=\frac{(1-2p)^n+1}{2}.$$

(4) On résout
$$\begin{aligned} P(A)\geq\frac{1}{2} &\Longleftrightarrow \frac{(1-2p)^n+1}{2}\geq\frac{1}{2}\\ &\Longleftrightarrow (1-2p)^n\geq 0\\ &\Longleftrightarrow n \text{ pair ou } 1-2p\geq 0\\ &\Longleftrightarrow n \text{ pair ou } p\leq\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Partie III

(1) On "gagne" 10 euros pour chaque *Pile* (compté avec X) affecté du signe donné par Y selon la parité de X, ou encore
$$G=10XY=10X(-1)^X.$$
Toujours avec le théorème de transfert, on obtient
$$\begin{aligned} E(G) &= \sum_{k=0}^{n}10k(-1)^kP(X=k)\\ &= 10\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

(2) Soit $k\in[\![1;n]\!]$.
$$k\binom{n}{k}=k\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}=n\binom{n-1}{k-1}.$$

(3) C'est un peu le même calcul que celui justifiant la formule de l'espérance de la binomiale.

$$\begin{aligned}
E(G) &= 10\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}(-p)^k(1-p)^{n-k} \\
&= 10n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(-p)^k(1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= 10n(-p)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(-p)^j(1-p)^{n-1-j} \\
&= -10np(1-2p)^{n-1}
\end{aligned}$$

(4) On connait déjà les conditions pour que $P(A) \geq 1/2$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
E(G) \leq 0 &\iff -10np(1-2p)^{n-1} \leq 0 \\
&\iff (1-2p)^{n-1} \geq 0 \\
&\iff 1-2p \geq 0 \text{ ou } n\text{impair}
\end{aligned}$$

Comme n ne peut pas être pair et impair à la fois, l'intersection des conditions précédentes donne bien

$$\left\{\begin{array}{l} P(A) \geq \frac{1}{2} \\ \\ E(G) \leq 0 \end{array}\right. \iff p \leq \frac{1}{2}.$$

(5) (a) La fonction f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et *a foriori* sur $[0;1/2]$. Le calcul donne

$$f'(x) = (1-2x)^{n-2}(1-2nx).$$

On obtient le tableau de variations suivant

x	0		$1/2n$		$1/2$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$f(1/2n)$	↘	0

avec

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}.$$

(b) La rentabilité est optimale pour le concepteur lorsque l'espérance du gain est minimale, ou, de manière équivalente, lorsque $f(p)$ est maximal sur $[0;1/2]$. Il faut donc choisir

$$p = \frac{1}{2n}.$$