ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir surveillé n°2

Durée: 4 heures

Exercice 1

Partie I - Étude d'une suite récurrente

On considère une suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}.$$

On introduit également la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}.$$

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. En déduire que la suite (v_n) est bien définie.

(2) Trouver un réel $q \in]0;1[$ tel que

$$\frac{\ln(n)}{2^n} = o(q^n), \qquad n \to +\infty.$$

En déduire que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$ converge. Dans toute la suite, on note

$$\sigma = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}.$$

(3) (a) Pour tout entier $k \geq 1$, exprimer $v_k - v_{k-1}$ en fonction de k.
(b) Déterminer alors la nature de la série $\sum_{k\geq 1}(v_k - v_{k-1})$.
(c) En déduire la convergence de la suite (v_n) et exprimer sa limite ℓ en fonction de u_0 et σ.

(4) On suppose dans cette question que $u_0 \neq e^{-\sigma}$.
(a) En distinguant les cas $u_0 < e^{-\sigma}$ et $u_0 > e^{-\sigma}$, déterminer le signe de ℓ.
(b) En déduire la limite de la suite $(\ln(u_n))$ puis le comportement en $+\infty$ de u_n.

(5) On suppose dans cette question que $u_0 = e^{-\sigma}$.
(a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}.$$

(b) Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(u_n) \geq \frac{\ln(n+1)}{2}.$$

(c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Partie II - Approximation de σ

(6) (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x$.
(b) Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, avec $m \geq n+1$. Déterminer

$$\lim_{m \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \sum_{k=1}^{m-n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad \text{et} \quad \lim_{m \to +\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times \sum_{k=1}^{m-n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k}.$$

(c) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{n+2}{2^n}.$$

(7) Montrer alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left| \sigma - \left(- \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leq \frac{n+2}{2^n}.$$

(8) Écrire alors une fonction `SciLab` d'en-tête `function sigma=approx(eps)` prenant en argument un réel `eps` et renvoyant une approximation de σ à `eps` près.

Exercice 2

Partie I - Un sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On rappelle que l'ensemble des matrices symétriques d'ordre 2, noté $\mathcal{S}_2$, est le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$\mathcal{S}_2 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \ {}^tM = M\},$$

où ${}^tM$ désigne la *transposée* de M:

$${}^t\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer trois matrices F, G, H de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\mathcal{S}_2 = \text{Vect}(F, G, H)$. En déduire que $\mathcal{S}_2$ est un espace vectoriel et préciser sa dimension.

(2) On considère, dans la suite de cette partie, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
(a) Calculer AFA, AGA et AHA.
(b) Montrer que, si M est une matrice symétrique d'ordre 2, il en est de même pour AMA.
(c) Déterminer le rang de la famille (AFA, AGA, AHA).

Partie II - Un polynôme annulateur d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

On considère dans cette partie les trois matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

(3) On introduit les trois ensembles

$$\begin{aligned} E_{-4} &= \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : \ MX = -4X\} \\ E_1 &= \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : \ MX = X\} \\ E_{16} &= \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : \ MX = 16X\} \end{aligned}$$

Montrer que ces trois ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et donner une base et la dimension de chacun d'eux.

(4) On note $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
(b) Montrer que $M = PDP^{-1}$.

(5) Vérifier que $(D + 4I)(D - I)(D - 16I) = 0$.
(6) En déduire que $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$. La matrice M est-elle inversible? Si oui, exprimer son inverse comme polynôme en M.

Exercice 3

On lance indéfiniment une pièce donnant *Pile* avec la probabilité p et *Face* avec la probabilité $q = 1-p$. On suppose que $p \in]0, 1[$ et on admet que les lancers sont mutuellement indépendants.

Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2, on dit que le $k^{ième}$ lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k-1)^{ième}$ lancer.

On note P_k (resp. F_k) l'événement : "on obtient *Pile* (resp. *Face*) au $k^{ième}$ lancer".
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

Par exemple lorsque qu'on effectue les 3 premiers lancers et qu'on obtient l'événement $P_1 \cap F_2 \cap P_3$, il y a eu deux changements (aux $2^{ième}$ et $3^{ième}$ lancers). Ou encore, lorsqu'on effectue les 4 premiers lancers et qu'on obtient l'événement $F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4$, il y a eu un seul changement (au $3^{ième}$ lancer).

Partie I - Simulation informatique et conjectures

(1) Recopier et compléter la fonction `SciLab` suivante prenant en argument un entier $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et un réel $p \in]0; 1[$ et renvoyant une simulation de la variable aléatoire X_n.

```
function X=exo3(n,p)
    X=0;
    T=grand(......, ......., 'bin', 1, p)
    for k=2:n
        if ......................... then
            X=....................
        end
    end
endfunction
```

(2) Que fait la fonction suivante ?

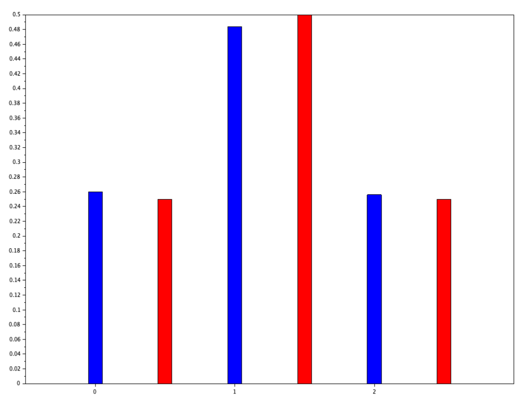
```
function t=bin_th(n,p)
    t=zeros(1,n+1)
    for k=1:n+1
        t(k)=prod(n-k+2:n)/prod(1:k-1)*p^(k-1)*(1-p)^(n-k+1);
    end
endfunction
```

(3) On exécute le script suivant pour différentes valeurs de n et avec $p = q = 1/2$.

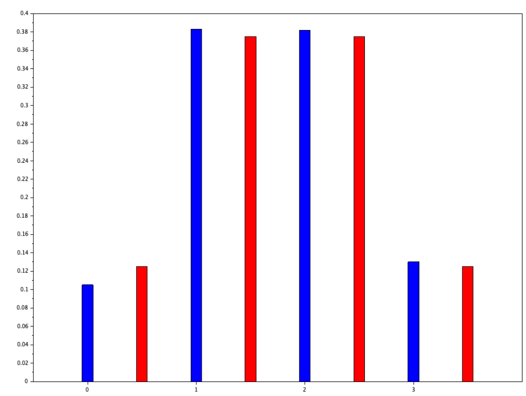
```
n=input('n=?')
p=1/2;
U=zeros(1, 1000);
```

```
for k=1:1000
    U(k)=exo3(n,p)
end
T=tabul(U, 'i')
T(:,2)=T(:,2)/1000;
t=bin_th(n-1,p)
bar([0:n-1]+.5, t, width=0.1, "red") //on décale de 0.5 pour faciliter la
lecture graphique
bar(T(:,1), T(:,2), width=0.1, "blue")
```

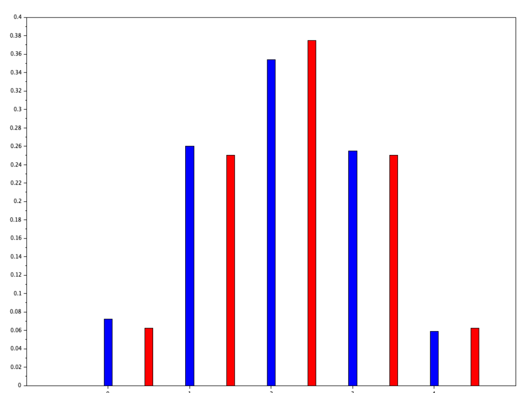
Pour les valeurs de $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ et $n = 5$, le script affiche les diagrammes suivants



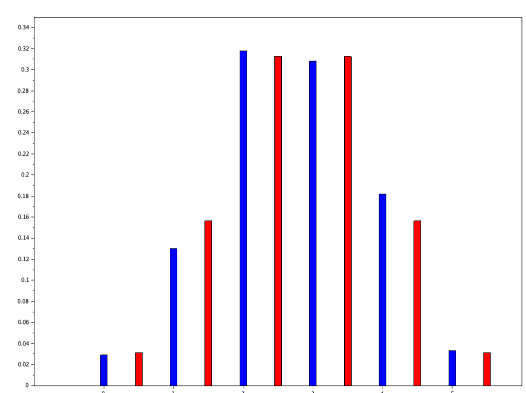
$n = 2$



$n = 3$



$n = 4$



$n = 5$

Que peut-on alors conjecturer quant à la la loi de X_n? Dans quel cas? Justifier le raisonnement.

Partie II - Étude de quelques exemples

(4) Donner (en la justifiant) la loi de X_2.

(5) (a) Donner (en la justifiant) la loi de X_3.
(b) Vérifier que $E(X_3) = 4pq$ et que $V(X_3) = 2pq(3 - 8pq)$.

(6) (a) Trouver la loi de X_4.
(b) Calculer $E(X_4)$.

Partie III - Étude du cas $p \neq q$.

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

(7) Exprimer $P(X_n = 0)$ en fonction de p, q et n.

(8) (a) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$b^m - a^m = (b-a)\left(\sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k}\right).$$

(b) En décomposant l'événement $(X_n = 1)$ en une réunion d'événements incompatibles, montrer que

$$P(X_n = 1) = \frac{2pq}{q-p}\left(q^{n-1} - p^{n-1}\right).$$

(9) En distinguant les cas n pair et n impair, exprimer $P(X_n = n-1)$ en fonction de p et q.

(10) Retrouver, grâce aux trois questions précédentes, les lois de X_3 et X_4.

(11) Pour tout entier naturel $k \geq 2$, on note Z_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le $k^{ième}$ lancer est un changement et 0 sinon.

(a) À l'aide du système complet d'événement (P_{k-1}, F_{k-1}), montrer que Z_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $2pq$.
(b) Écrire X_n à l'aide de certaines des variables Z_k.
(c) En déduire $E(X_n)$.

Partie IV - Étude du cas $p = q$.

(12) Vérifier, en utilisant les résultats de la partie 1, que X_3 et X_4 suivent chacune une loi binomiale.
(13) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, X_n suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.