ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir surveillé n°2

Solution

Exercice 1

Partie I - Étude d'une suite récurrente

On considère une suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}.$$

On introduit également la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}.$$

(1) C'est une récurrence immédiate.
- Pour $n = 0$, on suppose *a priori* que $u_0 > 0$.
- Si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, alors $u_{n+1} > 0$ comme quotient de deux quantités strictement positives. La récurrence est terminée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ donc $v_n = \ln(u_n)$ existe et la suite (v_n) est bien définie.

(2) Il faut que $q \in]0;1[$ soit trouvé tel que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{(2q)^n} = 0.$$

Afin de pouvoir utiliser une croissance comparée dont le résultat est bien une limite nulle, il faut que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(2q)^n} = 0$$

donc que $2q > 1$. N'importe quel $q > 1/2$ convient. Comme on veut $q < 1$, on peut par exemple prendre $q = 2/3$: on a bien

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \ln(n) = 0$$

donc

$$\frac{\ln(n)}{2^n} = o\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

Par critère de comparaison par négligeabilité pour les séries à termes positifs, comme $(2/3)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente (et que $|n(k)/2^k \geq 0$), on a bien la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$. Dans toute la suite, on note

$$\sigma = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}.$$

(3) (a) Soit $k \geq 1$.

$$\begin{aligned} v_k - v_{k-1} &= \ln(u_k) - \ln(u_{k-1}) \\ &= \frac{1}{2^k}\ln\left(\frac{u_{k-1}^2}{k}\right) - \frac{1}{2^{k-1}}\ln(u_{k-1}) \\ &= \frac{2}{2^k}\ln(u_{k-1}) - \frac{\ln(k)}{2^k} - \frac{1}{2^{k-1}}\ln(u_{k-1}) \\ &= -\frac{\ln(k)}{2^k}. \end{aligned}$$

(b) D'après la Question 2 et le calcul de la question précédente, il est clair que (le fait de multiplier un terme général par une constante ne modifiant pas la nature de la série correspondante) la série $\sum_{k\geq 1}(v_k - v_{k-1})$ converge.

(c) C'est le lien classique entre série *télescopique* et suite. Comme, par télescopage,

$$\sum_{k=1}^{n}(v_k - v_{k-1}) = v_n - v_0,$$

on a

$$v_n = v_0 + \sum_{k=1}^{n}(v_k - v_{k-1}).$$

Or, la somme partielle ci-dessus est convergente (car la série converge) donc la suite (v_n) converge vers une limite ℓ. De plus, on a

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} v_n = v_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}(v_k - v_{k-1}) = \ln(u_0) + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{\ln(k)}{2^k}\right) = \ln(u_0) + \sigma.$$

(4) On suppose dans cette question que $u_0 \neq e^{-\sigma}$.

(a) D'après la question précédente, $\ell = \ln(u_0) + \sigma$. Donc, par stricte croissance de la fonction exponentielle,

$$\ell > 0 \iff u_0 > e^{-\sigma}, \qquad \text{et} \qquad \ell < 0 \iff u_0 < e^{-\sigma}.$$

(b) On revient aux deux cas possibles

- Si $u_0 < e^{-\sigma}$, alors $v_n \to \ell < 0$. Mais alors,

$$\ln(u_n) = 2^n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

et par composition avec l'exponentielle

$$u_n = \exp(\ln(u_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- Si $u_0 > e^{-\sigma}$, alors $v_n \to \ell > 0$. Mais alors,

$$\ln(u_n) = 2^n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et par composition avec l'exponentielle

$$u_n = \exp(\ln(u_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

(5) On suppose dans cette question que $u_0 = e^{-\sigma}$.

(a) Comme $u_0 = e^{-\sigma}$, il suit que $\ln(u_0) = -\sigma$. Et

$$\begin{aligned} v_n &= -\sigma + \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{\ln(k)}{2^k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(b) D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{\ln(u_n)}{2^n} \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \\ &\geq \frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}} \qquad \text{car } \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \geq 0 \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\ln(u_n) = 2^n v_n \geq 2^n \frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}} = \frac{\ln(n+1)}{2},$$

ce qu'on nous demandait.

(c) Comme

$$\frac{\ln(n+1)}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

la question précédente et le critère de comparaison pour les suites permettent d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Partie II - Approximation de σ

(6) (a) On l'a fait mille fois. On étudie la fonction différence et son maximum. Bref, on omet ici le détail.

(b) Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, avec $m \geq n+1$. On reconnait les sommes se séries géométriques (dérivées). Plus précisément,

$$\sum_{k=1}^{m-n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(1-1/2)^2} = 4, \qquad \sum_{k=1}^{m-n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-1/2} - 1 = 1.$$

Il suit que,

$$\lim_{m\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \sum_{k=1}^{m-n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}, \qquad \lim_{m\to+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times \sum_{k=1}^{m-n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

(c) C'est LA question un peu technique de l'exercice mais on a bien préparé le terrain. Soit $m \geq n+1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{m} \frac{\ln(k)}{2^k} &\leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{k}{2^k} && \text{(d'après la question 6}a\text{)}\\
&= \sum_{j=1}^{j-n} \frac{j+n}{2^{j+n}} && \text{(changement d'indice } j=k-n\text{)}\\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=1}^{n} j \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} + n\frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{m-n} \left(\frac{1}{2}\right)^{j}\\
&\underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.
\end{aligned}$$

On a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{n+2}{2^n}.$$

(7) Il est clair que, d'après la question précédente,

$$\left|\sigma - \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)\right| = \left|-\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}\right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{n+2}{2^n}.$$

(8) D'après la question précédente, la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{k\geq 1} -\frac{-\ln(k)}{k}$ fournit une approximation de σ dès lors que

$$\frac{n+2}{2^n} \leq \texttt{eps}.$$

On écrit alors le programme demandé sans difficulté.

```
function sigma=approx(eps)
    n=1;
    sigma=0;
    while (n+2)/2^n >=eps
        n=n+1;
        sigma=sigma-log(n)/2^n;
    end
endfunction
```

Exercice 2 - D'après EML 2010

Partie I - Un sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On rappelle que l'ensemble des matrices symétriques d'ordre 2, noté $\mathcal{S}_2$, est le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$\mathcal{S}_2 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \ {}^tM = M\},$$

où ${}^tM$ désigne la *transposée* de M:

$${}^t\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

(1) On peut écrire

$$\begin{aligned} M=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{S}_2 &\iff \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}\\ &\iff b=c\\ &\iff M=\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &\iff M=aF+bG+dH,\end{aligned}$$

où $F=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $H=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Ainsi, on peut écrire

$$\mathcal{S}_2=\mathrm{Vect}(F,G,H).$$

Ainsi, $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et par conséquent un espace vectoriel. La famille génératrice de $\mathcal{S}_2$ exhibée, (F,G,H) est clairement libre,

$$\alpha F+\beta G+\gamma h=0\iff\alpha=\beta=\gamma=0,$$

donc elle forme une base de $\mathcal{S}_2$ qui est alors de dimension 3.

(2) On considère, dans la suite de cette partie, la matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

(a) On fait les calculs. Un peu long mais sans difficulté.

$$\begin{aligned} AFA &= =\begin{pmatrix} 0 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\\ AGA &= \begin{pmatrix} 0 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4\\ 4 & 12\end{pmatrix}\\ AHA &= \begin{pmatrix} 0 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 4 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(b) Le calcul précédent permet de voir que $AFA\in\mathcal{S}_2$, $AGA\in\mathcal{S}_2$ et $AHA\in\mathcal{S}_2$. Ainsi, si $M\in\mathcal{S}_2$, alors $M=aF+bG+cH$ et

$$AMA=A\left(aF+bG+cH\right)A=aAFA+bAGA+cAHA.$$

Or, AFA, AGA et AHA sont dans $\mathcal{S}_2$ qui est un espace vectoriel donc stable par combinaison linéaire. Ainsi, AMA est encore un élément de $\mathcal{S}_2$.

(c) Le rang de la famille (AFA, AGA, AHA) est la dimension de l'espace qu'elle engendre. Ce rang sera égal à 3 si la famille est libre. On voit que c'est le cas

$$\begin{aligned}\alpha AFA+\beta AGA+\gamma AHA=0 &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 4\gamma &=& 0\\ 4\beta+6\gamma &=& 0\\ 4\beta+6\gamma &=& 0\\ 4\alpha+12\beta+9\gamma &=& 0\end{array}\right.\\ &\iff \alpha=\beta=\gamma=0.\end{aligned}$$

Donc la famille (AFA, AGA, AHA) est de rang 3.

Partie II - Un polynôme annulateur d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

On considère dans cette partie les trois matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

(3) On introduit les trois ensembles

$$\begin{aligned} E_{-4} &= \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : \ MX = -4X\} \\ E_1 &= \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : \ MX = X\} \\ E_{16} &= \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : \ MX = 16X\} \end{aligned}$$

On résout les équations caractérisant l'appartenance à chacun d'eux.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-4} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 4z &=& -4x \\ 4y + 6z &=& -4y \\ 4x + 12y + 9z &=& -4z \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& -z \\ 4y + 3z &=& 0 \end{array} \right.$$
$$\iff X = z \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$E_{-4} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

est bien un espace vectoriel comme sous-espace de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. De la même manière, on montre que E_1 et E_{16} sont des espaces vectoriels et plus précisément que

$$E_1 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad E_{16} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Chacun de ces (sous-)espaces est de dimension 1 car le vecteur qui les engendre étant non nul il en forme une base.

(4) On note $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) On fait un pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & -5 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 20 & 0 & 10 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 20 & -5 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 100 & 0 & 0 & 8 & 12 & -8 \\ 0 & 100 & 0 & 16 & -16 & 4 \\ 0 & 0 & 25 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Ainsi, P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 8 & 12 & -8 \\ 16 & -16 & 4 \\ 4 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Comme P est inversible, ceci est équivalent au fait que $MP = PD$, ce qui est plus agréable à montrer. En effet,

$$MP = \begin{pmatrix} -16 & 4 & 16 \\ -12 & -2 & 32 \\ 16 & 1 & 64 \end{pmatrix} = PD.$$

Et on a bien $M = PDP^{-1}$.

(5) On vérifie et c'est easy.

$$(D+4I)(D-I)(D-16I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

(6) En développant l'égalité de la question précédente, on trouve

$$D^3 - 13D^2 - 52D + 64I = 0.$$

En multipliant cette égalité à gauche par P et à droite par P^{-1} (sachant que $PD^kP{-}1 = \left(PDP^{-1}\right)^k = M^k$), on trouve

$$M^3 - 13M^2 - 52M + 64I = 0 \Longleftrightarrow M^3 = 13M^2 + 52M - 64I.$$

Ceci se réécrit aussi

$$M^3 - 13M^2 - 52M = -64I \Longleftrightarrow M \cdot \frac{1}{64}\left(-M^2 + 13M + 52I\right) = I$$

Ainsi, M est bien inversible et

$$M^{-1} = \frac{1}{64}\left(-M^2 + 13M + 52I\right).$$

Remarque. La matrice D est clairement inversible (matrice diagonale sans zéro sur la diagonale) et M et D sont *semblables*, il était alors clair que M était également inversible.

Exercice 3 - Inspiré de EDHEC 2000

On lance indéfiniment une pièce donnant *Pile* avec la probabilité p et *Face* avec la probabilité $q = 1-p$. On suppose que $p \in]0,1[$ et on admet que les lancers sont mutuellement indépendants.

Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2, on dit que le $k^{ième}$ lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k-1)^{ième}$ lancer.

On note P_k (resp. F_k) l'événement : "on obtient *Pile* (resp. *Face*) au $k^{ième}$ lancer".
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

Par exemple lorsque qu'on effectue les 3 premiers lancers et qu'on obtient l'événement $P_1 \cap F_2 \cap P_3$, il y a eu deux changements (aux $2^{ième}$ et $3^{ième}$ lancers). Ou encore, lorsqu'on effectue les 4 premiers lancers et qu'on obtient l'événement $F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4$, il y a eu un seul changement (au $3^{ième}$ lancer).

Partie I - Simulation informatique et conjectures

(1) Recopier et compléter la fonction `SciLab` suivante prenant en argument un entier $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et un réel $p \in]0;1[$ et renvoyant une simulation de la variable aléatoire X_n.

```
function X=exo3(n,p)
    X=0; //nombre de changements initialisé à zéro
    T=grand(1, n, 'bin', 1, p) //n variables de Bernoulli = n lancers
indépendants
    for k=2:n
        if T(k) <> T(k-1) then //si lancer k différent de lancer k-1
            X=X+1 // un changement de plus
        end
    end
endfunction
```

(2) Cette fonction renvoie un vecteur ligne à $n+1$ composantes. La composante numéro k (pour $k \in [\![1; n+1]\!]$) contient la valeur de la probabilité théorique

$$P(Z = k-1) = \binom{n}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}$$

où Z suit une loi binomiale de paramètres n et p. Le *décalage* sur k provient du fait que les composantes sous `SciLab` sont numérotées de 1 à $n+1$ alors que Z prend ses valeurs de 0 à n.

(3) Dans le cas où $p = 1/2$, on peut conjecturer (car les hauteurs des fréquences pour 1000 expériences coïncident avec les valeurs théoriques pour $n = 2, 3$ et 4) que

$$X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n-1, \frac{1}{2}\right).$$

Partie II - Étude de quelques exemples

(4) Lors de deux lancers, il peut y avoir au plus 1 changement ou aucun. Donc $X_2(\Omega) = \{0; 1\}$. Ainsi, X_2 est une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli. Son paramètre est la probabilité de valoir 1. Par incompatibilité puis indépendances des lancers, on a

$$P(X_2 = 1) = P(P_1 \cap F_2 \cup F_1 \cap P_2) = P(P_1 \cap F_2) + P(F_1 \cap P_2) = pq + qp = 2pq.$$

On en déduit que $P(X_2 = 0) = 1 - 2pq$.

$$X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(2pq).$$

(5) (a) Lors de 3 lancers, on peut avoir 0, 1 ou 2 changements donc $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. Avec le même raisonnement que précédemment,,

$$\begin{aligned} P(X_3 = 0) &= P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) + P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) \\ &= q^3 + p^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_3 = 2) &= P(F_1 \cap P_2 \cap F_3) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) \\ &= pq^2 + qp^2 = pq(q+p) = pq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_3 = 1) &= P(F_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(F_1 \cap F_2 \cap P_3) + P(P_1 \cap F_2 \cap F_3) + P(P_1 \cap P_2 \cap F_3) \\ &= 2qp^2 + 2pq^2 = 2pq(p+q) \\ &= 2pq \end{aligned}$$

(b) On calcule

$$\begin{array}{rcl} E(X_3) & = & 0\cdot P(X_3=0)+1\cdot P(X_3=1)+2\cdot P(X_3=2) \\ & = & 2pq^2+2qp^2+2pq^2+2qp^2 \\ & = & 4pq^2+4qp^2=4p(q^2+qp)=4p(q^2+q(1-q)) \\ & = & 4pq, \end{array}$$

ce qui est bien la valeur attendue. Pour la variance, on utilise la formule de König-Huygens,

$$V(X_3)=E(X_3^2)-E(X_3)^2$$

et pour calculer $E(X_3)$, c'est le théorème de transfert

$$\begin{array}{rcl} E(X_3^2) & = & 0^2\cdot P(X_3=0)+1^2\cdot P(X_3=1)+2^2\cdot P(X_3=2) \\ & = & 2pq^2+2qp^2+4pq^2+4qp^2 \\ & = & 6pq^2+6qp^2 \\ & = & 6pq \end{array}$$

et il suit que

$$V(X_3)=6pq-(4pq)^2=6pq-16p^2q^2=2pq(3-8pq),$$

ce qui est encore bien la formule attendue. Ouf.

(6) (a) On fournit le même raisonnement que précédemment, mais avec des calculs un tout petit peu plus longs. On commence par voir que $X_4(\Omega)=[\![0;3]\!]$. On donne la loi de X_4 dans le tableau ci-dessous

k	0	1	2	3
$P(X_4=k)$	q^4+p^4	$2pq(1-pq)$	$1-p^4-q^4-2pq$	$2p^2q^2$

(On a déduit $P(X_4=2)$ des 3 autres car c'était le cas le plus "compliqué".)

(b) Le calcul donne

$$\begin{array}{rcl} E(X_4) & = & 0\cdot P(X_4=0)+1\cdot P(X_4=1)+2\cdot P(X_4=2)+3\cdot P(X_4=3) \\ & = & 2pq(1-pq)+2(1-p^4-q^4-2pq)+6p^2q^2 \\ & - & 2(1-p^4-q^4-pq+2p^2q^2) \\ & = & 2(1-(p^2-q^2)^2-pq)=2(1-(p-q)^2-pq) \\ & = & 2(1-p^2-q^2-2pq+3pq)=2(1-(p+q)^2+3pq) \\ & = & 6pq. \end{array}$$

Partie III - Étude du cas $p\neq q$.

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

(7) $(X_n=0)$ correspond à aucun changement, c'est à dire une succession de n *Pile* ou une succession de n *Face*, plus précisément

$$P(X_n=0)=P\left(\bigcap_{k=1}^{n}F_k\right)+P\left(\bigcap_{k=1}^{n}P_k\right)=q^n+p^n.$$

(8) (a) Une petite formule classique, souvent donnée comme illustration des sommes télescopiques.

$$\begin{aligned}(b-a)\left(\sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k}\right) &= \left(\sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-k}\right) - \left(\sum_{k=0}^{m-1} a^{k+1} b^{m-1-k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\left(a^k b^{m-k} - a^{k+1} b^{m-(k+1)}\right) \\ &= a^0 b^m - a^{m-1+1} b^{m-(m-1+1)} \qquad \text{(par télescopage)} \\ &= b^m - a^m,\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$b^m - a^m = (b-a)\left(\sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k}\right).$$

(b) Pour avoir un changement, il faut soit avoir une première succession de k *Pile* (avec k entre 1 et $n-1$ donc on aura une réunion d'évènements incompatibles pour chaque valeur de k) et le reste de *Face* ou bien la situation inverse (les deux situations sont bien incompatibles). On peut écrire cela comme suit

$$(X_n = 1) = \left(\bigcup_{k=1}^{n-1}\left(\bigcap_{j=1}^{k} P_j \cap \bigcap_{j=k+1}^{n} F_j\right)\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n-1}\left(\bigcap_{j=1}^{k} F_j \cap \bigcap_{j=k+1}^{n} P_j\right)\right)$$

Le calcul donne alors

$$\begin{aligned}P(X_n = 1) &= \sum_{k=1}^{n-1} P\left(\bigcap_{j=1}^{k} P_j \cap \bigcap_{j=k+1}^{n} F_j\right) + \sum_{k=1}^{n-1} P\left(\bigcap_{j=1}^{k} F_j \cap \bigcap_{j=k+1}^{n} P_j\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} p^k q^{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} q^k p^{n-k} \\ &= q^n \sum_{k=1}^{n-1} (p/q)^k + p^n \sum_{k=1}^{n-1} (q/p)^k \\ &= q^n (p/q) \frac{1-(p/q)^{n-1}}{1-p/q} + p^n (q/p) \frac{1-(q/p)^{n-1}}{1-q/p} \\ &= \frac{pq}{q-p}\left(q^{n-1} - p^{n-1}\right) + \frac{qp}{q-p}\left(q^{n-1} - p^{n-1}\right) \\ &= \frac{2pq\left(q^{n-1} - p^{n-1}\right)}{q-p},\end{aligned}$$

ce qu'on voulait!

(9) Pour avoir $n-1$ changements (la valeur maximale), il faut changer à chaque lancer.

- Si n est pair. On a deux alternatives, commençant l'une par *Pile*, l'autre par *Face*, les deux alternant les faces et chacune contenant $n/2$ *Pile* et $n/2$ *Face*, donc, dans ce cas

$$P(X_n = n-1) = pqpq...pq + qpqp...qp = 2(pq)^n.$$

- Si n est impair. La face par laquelle on commence apparaîtra davantage. Plus précisément, si $n = 2k+1$ (ou $k = (n-1)/2$), on aura $k+1$ *Face* et k *Pile* si on commence par des *Face* et l'inverse en commençant par des *Pile*.

$$\begin{aligned} P(X_n = n-1) &= qpqp...qpq + pqpq...pqp = (qp)^k q + (pq)^k p \\ &= q(pq)^{(n-1)/2} + p(pq)^{(n-1)/2} \\ &= (p+q)(pq)^{(n-1)/2} \\ &= (pq)^{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned}$$

(10) On compare les résultats obtenus aux questions précédentes avec $n = 3$ et $n = 4$ à ceux de la première partie.

- $n = 3$ (impair). Les résultats des trois dernières questions donnent

$$P(X_3 = 0) = p^n + q^n = p^3 + q^3, \qquad P(X_3 = 2) = (pq)^{\frac{n-1}{2}} = pq,$$

$$P(X_3 = 1) = 2pq\frac{q^{n-1} - p^{n-1}}{q-p} = 2pq\frac{q^2 - p^2}{q-p} = 2pq(q+p) = 2pq,$$

et il s'agit bien des valeurs trouvées dans la Partie I.

- $n = 4$ (pair).

$$P(X_4 = 0) = p^n + q^n = p^4 + q^4, \qquad P(X_4 = 3) = 2(pq)^4,$$

On peut utiliser la factorisation de la Question ($8a$) pour factoriser $q^3 - p^3$

$$\begin{aligned} P(X_4 = 1) &= \frac{2pq(q^3 - p^3)}{q-p} \\ &= \frac{2pq(q-p)(q^2 + qp + p^2)}{q-p} = 2pq(q^2 + qp + p^2) \\ &= 2pq(q^2 + 2pq + p^2 - pq) = 2pq((q+p)^2 - pq) = 2pq(1 - pq). \end{aligned}$$

Il s'agit encore bien des 3 valeurs trouvées dans la Partie I.

(11) Pour tout entier naturel $k \geq 2$, on note Z_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le $k^{ième}$ lancer est un changement et 0 sinon.

(a) Comme $Z_k(\Omega) = \{0, 1\}$, c'est en effet une loi de Bernoulli dont le paramètre est la probabilité de $(Z_k = 1)$. Pour avoir un changement au $k-$ième lancer, il suffit d'avoir un résultat différent du $(k-1)-$ème lancer. Mais alors, d'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e (P_{k-1}, F_{k-1}),

$$\begin{aligned} P(Z_k = 1) &= P_{P_{k-1}}(Z_k = 1)P(P_{k-1}) + P_{F_{k-1}}(Z_k = 1)P(F_{k-1}) \\ &= P_{P_{k-1}}(F_k)P(P_{k-1}) + P_{F_{k-1}}(P_k)P(F_{k-1}) \\ &= P(F_k)P(P_{k-1}) + P(P_k)P(F_{k-1}) \qquad \text{(car les lancers sont indépendants)} \\ &= qp + pq = 2pq. \end{aligned}$$

On a bien

$$Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}(2pq).$$

(b) Comme X_n compte le nombre de changements en n lancers et que (pour $k \geq 2$) Z_k vaut 1 si le $k-$ème lancer est un changement et 0 sinon, il est clair que

$$X_n = \sum_{k=2}^{n} Z_k.$$

(c) Par linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned} E(X_n) &= E\left(\sum_{k=2}^{n} Z_k\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n} E(Z_k) = \sum_{k=2}^{n} 2pq \\ &= 2(n-1)pq. \end{aligned}$$

Partie IV - Étude du cas $p = q$.

(12) Lorsque $p = q = 1/2$, les résultats de la Partie I donnent

$$P(X_3 = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$P(X_3 = 2) = (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) = \binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1,$$

$$P(X_3 = 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1$$

Donc on a bien

$$X_3 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right).$$

On vérifie de même que

$$X_4 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{2}\right).$$

(13) Il suffit de montrer par récurrence (dont seul le caractère héréditaire est à vérifier d'après la question précédente) que

$$X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n-1, \frac{1}{2}\right).$$

Supposons que ce soit vrai pour un certain $n \geq 4$. Comme $X_{n+1} = X_n + Z_{n+1}$, et que

$$P_{X_n=j}(X_{n+1} = k) = \begin{cases} P(Z_{n+1} = 0), & \text{si } k = j, \\ P(Z_{n+1} = 1), & \text{si } k = j+1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Ici,

$$P(Z_{n+1} = 0) = 1 - 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2} = P(Z_{n+1} = 1).$$

- Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k) &= \sum_{j=0}^{n-1} P_{X_n=j}(X_{n+1} = k)P(X_n = j) \\ &= P_{X_n=k}(X_{n+1} = k)P(X_n = k) + P_{X_n=k-1}(X_{n+1} = k)P(X_n = k-1) \\ &= P(Z_{n+1} = 0)P(X_n = k) + P(Z_{n+1} = 1)P(X_n = k-1) \\ &= \frac{1}{2}\binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \text{(par HR)} \\ &= \left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{(par la formule du triangle de Pascal).} \end{aligned}$$

- Pour $k = n$,

$$P(X_{n+1} = n) = P(X_n = n-1 \cap Z_{n+1} = 1) = P(X_n = n-1)P(Z_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

On a bien que

$$X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right),$$

ce qui termine la réccurence.