ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir surveillé n°3

Sujet type **EML** / **Ecricome**
Lundi 20 Janvier
Durée : 4 heures

Exercice 1

Partie I - Étude de deux variables aléatoires à densité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(2)(1+x)}, & \text{si } \ 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(1) Montrer que f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X.
(2) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
(3) (a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in [0; 1]$,

$$\frac{x}{1+x} = a + \frac{b}{1+x}.$$

(b) En déduire que $E(X)$ existe et que

$$E(X) = \frac{1}{\ln(2)} - 1.$$

(4) (a) Montrer que $E(X(X+1))$ existe et que

$$E(X(X+1)) = \frac{1}{2\ln(2)}.$$

(b) En déduire la valeur de $E(X^2)$ puis montrer que

$$V(X) = \frac{3\ln(2) - 2}{2\ln(2)^2}.$$

(5) On pose $Y = \dfrac{1}{X}$ et on admet que Y est une variable aléatoire.
(a) Montrer que la fonction de répartition de Y est la fonction F_Y définie par :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{\ln(2)} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right), & \text{si } \ x \geq 1 \end{cases}$$

(b) Vérifier que Y est une variable aléatoire à densité.
(c) Donner une densité de Y.
(d) Étudier l'existence de l'espérance de Y.

Partie II - Partie entière d'une variable à densité

On note N la partie entière de Y, c'est-à-dire que $N = \lfloor Y \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à Y. On admet que N est une variable aléatoire et on rappelle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (N = k) = (k \leq Y < k+1).$$

(6) (a) Déterminer $N(\Omega)$.
(b) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a :

$$P(N = k) = \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right).$$

(c) En déduire, en remarquant que $(k+1)^2 = k(k+2)+1$, que :

$$P(N = k) \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(2)} \frac{1}{k^2}.$$

(d) En déduire que N n'admet pas d'espérance.

(7) On pose $Z = Y - N$ et on note F_Z la fonction de répartition de Z.

(a) Montrer que $Z(\Omega) = [0;1[$.
(b) Déterminer $F_Z(x)$ pour $x < 0$ et pour $x \geq 1$.
(c) Soit $x \in [0;1[$. En utilisant la formule des probabilités totales avec un système complet d'évènements associé à la variable N, montrer que :

$$F_Z(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((k \leq Y < k+x))$$

puis que

$$F_Z(x) = \frac{1}{\ln(2)} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{k+x}\right) \right).$$

(d) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Simplifier les sommes partielles

$$\sum_{k=1}^{N} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{N} \ln\left(1 + \frac{1}{k+x}\right).$$

(e) En déduire que Z suit la même loi que X.

Exercice 2

On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, dont on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie A

(1) (a) Calculer A^2 puis vérifier que A^3 est la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
(b) Justifier que 0 est l'unique valeur propre possible de f.
(c) Déterminer une base et la dimension du noyau de f.
(d) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

(2) Soient $e'_1 = (-1,-1,1)$, $e'_2 = (2,-1,1)$ et $e'_3 = (-1,2,1)$.
(a) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.

(b) Démontrer que la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$ est la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) On note h l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M définie ci-dessous

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer deux réels α et β tels que $M = \alpha A + \beta I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.
(b) Déterminer la matrice M' de h dans la base $\mathcal{B}'$.
(c) En déduire que M est inversible.
(d) À l'aide de la Question (1) a, calculer $(M - I)^3$. En déduire l'expression de M^{-1} en fonction des matrices I, M et M^2.
(e) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer M^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices I, A et A^2.
Cette formule est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Partie B

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant $g \circ g = f$. On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice V carrée d'ordre 3 telle que :

$$V^2 = T$$

On note g l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}'$ est V.

(4) Montrer que $V\,T = T\,V$. En déduire que $g \circ f = f \circ g$.

(5) (a) Montrer que $g(e'_1)$ appartient au noyau de f.
En déduire qu'il existe un réel a tel que $g(e'_1) = a\ e'_1$.
(b) Montrer que $g(e'_2) - a\ e'_2$ appartient aussi au noyau de f.
En déduire qu'il existe un réel b tel que $g(e'_2) = b\ e'_1 + a\ e'_2$.
(c) Montrer que : $f \circ g(e'_3) = g \circ f(e'_3) = a\ e'_2 + b\ e'_1$.
En déduire que $g(e'_3) - a\ e'_3 - b\ e'_2$ appartient au noyau de f.
(d) En déduire qu'il existe un réel c tel que

$$V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

(6) Calculer V^2 en fonction de a, b et c, puis en utilisant l'hypothèse $V^2 = T$, obtenir une contradiction.

Exercice 3

(1) Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$N(x) = x^2 - 2x - 2(1 - x)\ln(1 - x).$$

(a) Montrer que la fonction N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$.
(b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a : $\ln(1 - x) \leq -x$.
(c) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a : $N'(x) \leq 0$.
(d) En déduire le signe de N sur l'intervalle $[0, 1[$.

(2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} -2\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$.
(b) En déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$.
(c) En déduire que la fonction f est continue sur $[0,1[$.
(d) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que pour tout $x \in]0,1[$, on a : $f'(x) = -2\dfrac{N(x)}{x^3(1-x)}$.
(e) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,1[$.
En déduire que f réalise une bijection strictement croissante de $[0,1[$ dans $[1,+\infty[$.

(3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1[$:

$$g_n(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2}f(x)\right).$$

(a) Montrer, à l'aide de la question 2e, que pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$0 \leq g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right).$$

(b) En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x$. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$,

$$\frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)} \leq 1.$$

(d) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
(e) On note φ une densité et Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Rappeler la formule définissant φ puis dresser le tableau de variation complet de Φ sur $\mathbb{R}$ en précisant la valeur de $\Phi(0)$.
(f) Montrer l'encadrement :

$$0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left(\Phi\left(\sqrt{n}\right) - \frac{1}{2}\right).$$

On pourra utiliser la question 3a puis effectuer le changement de variable $u = x\sqrt{n}$.
(g) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

(h) Écrire un programme en `SciLab` qui détermine une valeur de n pour laquelle $I_n \leq 10^{-1}$.

(i) Déterminer à présent par le calcul une valeur de n pour laquelle $I_n \leq 10^{-1}$. *On donne $50\pi \approx 157.08$.*