ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir surveillé n°3

Sujet type **EML** / **Ecricome**
Lundi 20 Janvier
Solution

Exercice 1

Cet exercice est inspiré d'un sujet **EDHEC 2015**, voie AST.

Partie I - Étude de deux variables aléatoires à densité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(2)(1+x)}, & \text{si } \ 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(1) On vérifie les points de la définition.

- La fonction f est positive sur $]0;1]$ comme inverse d'une fonction strictement positive sur $]0;1]$ et f est nulle ailleurs donc f est positive sur $\mathbb{R}$.
- La fonction f est continue sur $]0;1[$ comme inverse d'une fonction continue et f est nulle ailleurs donc f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$.
- Enfin, f étant nulle hors de $]0;1]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge si et seulement si l'intégrale
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$
converge. Comme $x \mapsto 1/(1+x)$ est continue sur $[0:1]$ (fermé), cette dernière intégrale converge et on a :
$$\int_0^1 \frac{1}{\ln(2)(1+x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(2)}\left[\ln(1+x)\right]_0^1 = 1.$$

Ainsi, f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X.

(2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $\quad F_X(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^t f(x)\mathrm{d}x.$

- si $t < 0$: $\quad F_X(t) = 0$ car $X(\Omega) =]0;1]$.
- si $t \in]0;1]$:
$$F_X(t) = \int_{-\infty}^0 0\mathrm{d}x + \int_0^t \frac{1}{\ln(2)(1+x)}\mathrm{d}x = 0 + \frac{1}{\ln(2)}\left[\ln(1+x)\right]_0^t = \frac{1}{\ln(2)}\ln(1+t).$$
- si $t > 1$: $\quad F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x)\mathrm{d}x = 1$ car $X(\Omega) =]0:1]$.

Finalement, on a

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ t < 0 \\ \dfrac{\ln(1+t)}{\ln(2)} & \text{si } \ t \in [0;1] \\ 1 & \text{si } \ t > 1 \end{cases}.$$

(3) (a) On a par identification :

$$a + \frac{b}{1+x} = \frac{a+b+ax}{1+x} = \frac{x}{1+x} \iff \begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}.$$

Ainsi, on a

$$\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}.$$

(b) On a

$$\begin{aligned} X \text{ admet une espérance } &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \text{ converge absolument} \\ &\iff \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \text{ converge} \end{aligned}$$

Comme $x \mapsto x/(1+x)$ est continue sur $[0;1]$ (fermé), cette dernière intégrale converge et on a en utilisant l'égalité obtenue en début de question :

$$E(X) = \int_0^1 \frac{x}{\ln(2)(1+x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(2)}\int_0^1 1 - \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(2)}\left[x - \ln(1+x)\right]_0^1 = \frac{1}{\ln(2)} - 1.$$

Ainsi, $E(X)$ existe et $E(X) = 1/\ln(2) - 1$.

(4) (a) D'après le théorème de transfert, $E(X(X+1))$ existe si et seulement si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(x+1)f(x)\mathrm{d}x$$

converge absolument ce qui a lieu si et seulement si

$$\int_0^1 x(x+1)f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{\ln(2)}\mathrm{d}x$$

converge. Cette dernière intégrale étant clairement convergente, on a :

$$E(X(X+1)) = \int_0^1 \frac{x}{\ln(2)}\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(2)}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\ln(2)}.$$

(b) Or, on a, en développant et par linéarité de l'espérance : $E(X(X+1)) = E(X^2 + X) = E(X^2) + E(X)$, ce qui donne :

$$E(X^2) = E(X(X+1)) - E(X) = \frac{1}{2\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)} + 1 = 1 - \frac{1}{2\ln(2)}.$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = 1 - \frac{1}{2\ln(2)} - \left(\frac{1}{\ln(2)} - 1\right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2\ln(2)} - \left(\frac{1}{\ln(2)^2} - \frac{2}{\ln(2)} + 1\right) \\ &= \frac{3}{2\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)^2} \\ &= \frac{3\ln(2) - 2}{2\ln(2)^2}. \end{aligned}$$

(5) On pose $Y = 1/X$ et on admet que Y est une variable aléatoire.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 1$: $F_Y(x) = P(Y \leq x) = 0$ car $Y \geq 1$ car $Y(\Omega) = [1; +\infty[$.
- Si $x \geq 1$:

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\
&= P\left(\frac{1}{X} \leq x\right) \\
&= P\left(X \geq \frac{1}{x}\right) \quad \text{car la fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\
&= 1 - P\left(X < \frac{1}{x}\right) \\
&= 1 - P\left(X \leq \frac{1}{x}\right) \quad \text{car } X \text{ est une variable à densité} \\
&= 1 - F_X\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= 1 - \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(2)} \quad \text{car } \frac{1}{x} \in]0; 1]
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

(b) F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (comme constante sur $]-\infty; 1[$ et comme composée sur $]1; +\infty[$).
En particulier, F_Y est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. De plus $\lim_{x \to 1^-} F_Y(x) = 0 = \lim_{x \to 1^+} F_Y(x) = F_Y(0)$ donc F_Y est continue en 1 donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, Y est une variable aléatoire à densité.

(c) On obtient une densité f_Y de Y en dérivant F_Y sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et en choisissant $f_Y(1) = 0$ par exemple :

$$\begin{aligned}
f_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ -\frac{1}{\ln(2)} \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} & \text{si } x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{\ln(2)} \frac{1}{x^2} \frac{x}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{\ln(2)} \frac{1}{x(x+1)} & \text{si } x > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

(d) Y admet une espérance si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x) \mathrm{d}x$$

converge absolument ce qui est équivalent à ce que

$$\int_1^{+\infty} x\frac{1}{\ln(2)}\frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(2)}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$$

converge. Or,

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty}\frac{1}{y}\mathrm{d}y$$

diverge comme intégrale de Riemann en $+\infty$ avec $a=1$. Ainsi, Y n'admet pas d'espérance.

Partie II - Partie entière d'une variable à densité

On note N la partie entière de Y, c'est-à-dire que $N = \lfloor Y \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à Y. On admet que N est une variable aléatoire et on rappelle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (N=k) = (k \leq Y < k+1).$$

(6) (a) Comme $Y(\Omega) = [1, +\infty[$, N prend toutes les valeurs entières entre 1 et $+\infty$. Ainsi, $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

(b) D'après l'énoncé, on a $(N=k) = (k \leq Y < k+1)$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
P(N=k) &= P(k \leq Y < k+1)\\
&= F_Y(k+1) - F_Y(k)\\
&= 1 - \frac{1}{\ln(2)}\ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{\ln(2)}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\ln(2)}\left(\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\ln(2)}\left(\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\ln(2)}\ln\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(N=k) = \frac{1}{\ln(2)}\ln\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right).$$

(c) On a : $k(k+2)+1 = k^2+2k+1 = (k+1)^2$, ce qui donne dans l'expression précédente :

$$P(N=k) = \frac{1}{\ln(2)}\ln\left(\frac{k(k+2)+1}{k(k+2)}\right) = \frac{1}{\ln(2)}\ln\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right).$$

Or, comme $\ln(1+u) \sim u$ (pour $u \to 0$) et que $1/k(k+2) \to 0$, on a :

$$\frac{1}{\ln(2)}\ln\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right) \sim \frac{1}{\ln(2)}\frac{1}{k(k+2)} \sim \frac{1}{\ln(2)}\frac{1}{k^2} \quad \text{donc} \quad P(N=k) \sim \frac{1}{\ln(2)}\frac{1}{k^2}.$$

(d) N admet une espérance si et seulement si la série $\sum kP(N=k)$ converge absolument. Or, on a d'après la question précédente :

$$kP(N=k) \sim k\frac{1}{\ln(2)}\frac{1}{k^2} \quad \text{soit} \quad kP(N=k) \sim \frac{1}{\ln(2)}\frac{1}{k}.$$

Or la série $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$ diverge (série harmonique) donc par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} kP(N=k)$ diverge et donc que N n'admet pas d'espérance.

(7) On pose $Z = Y - N$ et on note F_Z la fonction de répartition de Z.

(a) Par définition de N, on a : $N \leq Y < N+1$, ce qui donne : $0 \leq Y - N < 1$ soit $0 \leq Z < 1$.
Ainsi : $Z(\Omega) = [0;1[$.

(b) Comme $Z(\Omega) = [0;1[$,

- Si $x < 0$: $F_Z(x) = P(Z \leq x) = 0$ car $Z > 0$.
- Si $x \geq 1$: $F_Z(x) = P(Z \leq x) = 1$ car $Z \leq 1$.

(c) Soit $x \in [0;1[$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $\{(N=k) :\ k \in \mathbb{N}^*\}$, on a :

$$\begin{aligned}
F_Z(x) = P(Z \leq x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P((Z \leq x) \cap (N = k)) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P((Y - N \leq x) \cap (N = k)) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P((Y - k \leq x) \cap (N = k)) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P((Y \leq k + x) \cap (k \leq Y < k+1)) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P((k \leq Y < k + x)) \quad \text{car } \ (Y \leq k+x) \subset (Y < k+1) \quad \text{car } \ x < 1 \\
&= F_Y(k+x) - F_Y(k) \\
&= 1 - \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(1 + \frac{1}{k+x}\right) - \left(1 - \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\ln(2)} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{k+x}\right)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x \in [0;1[, \qquad F_Z(x) = \frac{1}{\ln(2)} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{k+x}\right)\right).$$

(d) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{N} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \ln(k+1) - \ln(k) \\
&= \ln(N+1) - \ln(1) \qquad \text{somme téléscopique} \\
&= \ln(N+1)
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} \ln\left(1 + \frac{1}{k+x}\right) &= \sum_{k=1}^{N} \ln(k+x+1) - \ln(k+x) \\
&= \ln(N+x+1) - \ln(1+x) \qquad \text{somme téléscopique}
\end{aligned}$$

(e)

- On a déjà : $F_Z(x) = 0 = F_X(x)$ pour $x < 0$ et $F_Z(x) = 1 = F_X(x)$ pour $x \geq 1$
- Soit $x \in [0;1[$. Reprenons la formule de la question 7c. On a à l'aide de la question précédente :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{k+x}\right) &= \sum_{k=1}^{N} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^{N} \ln\left(1+\frac{1}{k+x}\right) \\
&= \ln(N+1) - \ln(N+x+1) + \ln(1+x) \\
&= \ln\left(\frac{N+1}{N+x+1}\right) + \ln(1+x) \\
&\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1+x) \quad \text{par composition car} \quad \lim_{N\to+\infty} \frac{N+1}{N+x+1} = 1
\end{aligned}$$

Ainsi on a pour tout x de $[0;1]$:

$$F_Z(x) = \frac{1}{\ln(2)} \ln(1+x) = F_X(x).$$

Ainsi, on a bien $F_Z(x) = F_X(x)$ pour tout réel x donc Z suit la même loi que X.

Exercice 2, d'après ECRICOME 2019

On considère l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ dont on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme de E donc la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Partie A

(1) (a) Le calcul donne

$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{puis} \qquad A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3},$$

comme demandé.

(b) Comme $A^3 = 0$, il suit que X^3 est polynôme annulateur de A. Les valeurs propres de A sont donc à chercher parmi les racines de X^3 qui n'admet que 0. Comme A n'est pas inversible (plusieurs arguments recevables: $A^3 = 0$ donne par l'absurde une contradiction à l'inversibilité, ou bien on peut observer deux lignes opposées), 0 est bien l'unique valeurs propre de A.

(c) On résout

$$\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A) &\iff \begin{cases} -x+2y+z &= 0 \\ x+y+2z &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x &= -z \\ y &= -z \end{cases} \\
&\iff X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Comme $(-1,-1,1)$ est non nul et qu'il engendre le noyau de A, il en forme également une base.

(d) Le seul sous-espace propre (associé à la valeur propre 0) est le noyau de A, de dimension 1 différente donc de 3. Ainsi, A n'est pas diagonalisable.

(2) Soient $e'_1 = (-1,-1,1), e'_2 = (2,-1,1)$ et $e'_3 = (-1,2,1)$.

(a) La famille $\mathcal{B}'$ étant composée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer qu'elle est libre pour qu'elle en forme une base.

$$\begin{aligned}
\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = 0 \iff & \left\{\begin{array}{rcl} -\alpha + 2\beta - \gamma & = & 0 \\ -\alpha - \beta + 2\gamma & = & 0 \\ -\alpha + 2\beta + \gamma & = & 0 \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{rcl} -\alpha + 2\beta - \gamma & = & 0 \\ -3\beta + 3\gamma & = & 0 \\ 2\gamma & = & 0 \end{array}\right. \\
\iff & \alpha = \beta = \gamma = 0
\end{aligned}$$

et la famille est bien libre, ce qui permet de conclure au résultat souhaité.

(b) Le premier vecteur de cette famille est celui trouvé précédemment dans le noyau, son image est donc nulle par f. De plus

$$\begin{aligned}
f(e'_2) &= f(3e_1 + e'_1) = 3f(e_1) + f(e'_1) = 3f(e_1) = (-1,-1,1) \\
&= e'_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(e'_3) &= f(e'_1 + 3e_2) = f(e'_1) + 3f(e_2) = 3f(e_2) = (2,-1,1) \\
&= e'_2
\end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire

$$T = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) On pose

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note h l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la matrice $\mathcal{B}$ est la matrice M.

(a) On observe immédiatement (ou on peut trouver *via* résolution du système) que

$$M = -A + I, \qquad \text{ou encore} \qquad \alpha = -1,\ \beta = 1.$$

(b) Notant Id l'endomorphisme identité, la relation matricielle précédente implique que $h = -f + \mathrm{Id}$ ce qui permet de calculer les images des vecteurs de $\mathcal{B}'$ par h. Plus précisément, on a

$$\begin{aligned}
h(e'_1) &= -f(e'_1) + e'_1 \\
&= e'_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(e'_2) &= -f(e'_2) + e'_2 \\
&= -e'_1 + e'_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(e'_3) &= -f(e'_3) + e'_3 \\
&= -e'_2 + e'_3
\end{aligned}$$

ce qui donne alors

$$M' = \mathrm{Mat}(h, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) La matrice M' est triangulaire supérieure sans zéro sur la diagonale, elle est donc inversible. Comme M et M' représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, elles sont semblables et ont donc notamment le même rang. Ainsi, M est inversible.

(d) On observe que $M - I = -A$. Ainsi, $(M-I)^3 = (-A)^3 = 0$ d'après 1b. Comme M et I commutent, on peut développer

$$0 = (M-I)^3 = M^3 - 3M^2 + 3M - I \iff M^3 - 3M^2 + 3M = M \cdot (M^2 - 3M + 3I) = I.$$

On en déduit donc, par unicité de l'inverse de M, que

$$M^{-1} = M^2 - 3M + 3I.$$

(e) Comme $M = -A + I$ et que $-A$ commute avec I, la formule du binôme de Newton donne

$$\begin{aligned} M^n &= (-A+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-A)^k \qquad (\text{car } (-A)^k \cdot I^{n-k} = (-A)^k) \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} (-A)^k \qquad (\text{car } A^k = 0,\ k \geq 3) \\ &= \binom{n}{0}(-A)^0 + \binom{n}{1}(-A)^1 + \binom{n}{2}(-A)^2 \\ &= I - nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2. \end{aligned}$$

Pour $n = -1$, la formule donnerait, notant que $A = I - M$

$$M^{-1} = I + A + A^2 = I + I - M + I - 2M + M^2 = 3I - 3M + M^2,$$

ce qui est bien la relation trouvée en (d). Cette formule est donc également vraie pour $n = -1$.

Partie B

On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice V carrée d'ordre 3 telle que

$$V^2 = T.$$

On note g l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}'$ est V.

(1) Par hypothèse, on a

$$VT = V \cdot V^2 = V^3 = V^2 \cdot V = TV,$$

et les deux matrices commutent. Comme V et T représentent respectivement g et f dans la même base $\mathcal{B}'$, il suit que

$$\mathrm{Mat}(g \circ f, \mathcal{B}') = VT = TV = \mathrm{Mat}(f \circ g, \mathcal{B}').$$

Si deux endomorphismes ont la même matrice dans une même base, ils sont égaux. Ainsi, $f \circ g = g \circ f$.

(2) (a) Comme les deux endomorphismes commutent et que $f(e'_1) = 0$, on a

$$f(g(e'_1)) = g(f(e'_1)) = g(0) = 0$$

et $g(e'_1)$ est bien un élément du noyau de f. Celui-ci étant engendré par e'_1, il existe nécessairement un réel a tel que $g(e'_1) = ae'_1$.

(b) De la (presque) même manière

$$f(g(e_2') - ae_2') = f(g(e_2')) - af(e_2') = g(f(e_2')) - af(e_2') = g(e_1') - ae_1' = 0.$$

Ainsi, toujours car e_1' engendre $\mathrm{Ker}(f)$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $g(e_2') - ae_2' = be_1'$ ou encore

$$g(e_2') = be_1' + ae_2'.$$

(c) Toujours car g et f commutent (et d'après la question précédente),

$$f \circ g(e_3') = g \circ f(e_3') = g(e_2') = ae_2' + be_1'.$$

Ainsi,

$$f\left(g(e_3') - ae_3' - be_2'\right) = f \circ g(e_3') - af(e_3') - bf(e_2') = ae_2' + be_1' - ae_2' - be_1' = 0,$$

et $g(e_3') - ae_3' - be_2'$ est à nouveau un vecteur du noyau de f.

(d) Toujours comme $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_1')$, il existe un réel c tel que

$$g(e_3') - ae_3' - be_2' = ce_1' \iff g(e_3') = ae_3' + be_2' + ce_1'$$

ce qui permet enfin d'écrire la matrice de g (qui est, par définition, V) comme

$$V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

(e) Le calcul immédiat donne

$$V^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 + 2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

Mais alors, $V^2 = T$ donne en particulier $a = 0$ et $2ab = 1$ ce qui est impossible, rendant absurde l'hypothèse de départ.

Exercice 3

(1) **Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$, à valeurs réelles, telle que :**

$$N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x).$$

(a) **Montrer que la fonction N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.**

- La fonction $x \mapsto 1-x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ à valeur sur $\mathbb{R}_+^*$ car $x < 1 \Longrightarrow 1-x > 0$.
- La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc par composition, $x \mapsto \ln(1-x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.

Finalement $\boxed{\text{la fonction } N \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,1[}$ comme somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.

(b) **Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $\ln(1-x) \leq -x$.**

Posons $h : x \mapsto \ln(1-x) + x$.

h est dérivable sur $[0,1[$ et pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$h'(x) = \frac{-1}{1-x} + 1 = \frac{-x}{1-x} \leq 0 \qquad \text{car} \quad -x \leq 0 \;\text{ et }\; 1-x > 0 \;\text{ sur }\; [0,1[$$

Donc la fonction h est décroissant sur $[0,1[$. Elle est donc majorée par $h(0) = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in [0,1[$, on a : $h(x) \leq 0$ soit : $\boxed{\forall x \in [0,1[,\ \ln(1-x) \leq -x.}$

(c) **Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $N'(x) \leq 0$.**
Pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$\begin{aligned} N'(x) &= 2x - 2 - 2\left[-\ln(1-x) + (1-x)\frac{-1}{1-x}\right] \\ &= 2x - 2 + 2\ln(1-x) + 2 \\ &= 2\left((x + \ln(1-x)\right) \leq 0 \end{aligned}$$

car d'après la question précédente, $\ln(1-x) \leq -x$ soit $x + \ln(1-x) \leq 0$ pour tout $x \in [0,1[$.
Finalement, on a : $\boxed{\forall x \in [0,1[,\ N'(x) \leq 0.}$

(d) **En déduire le signe de N sur l'intervalle $[0,1[$.**
D'après la question précédente, la fonction N est décroissant sur $[0,1[$. Elle est donc majorée par $N(0) = 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in [0,1[, \text{ on a : } N(x) \leq 0}$.

(2) **Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$ par :** $f(x) = \begin{cases} -2\dfrac{x + \ln(1-x)}{x^2} & \textbf{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \textbf{si } x = 0 \end{cases}$

(a) **Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$.**
Au voisinage de 0, on a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

donc

$$\ln(1-x) = -x - \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Ainsi, $\boxed{\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)}$ au voisinage de 0.

(b) **En déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$.**
Au voisinage de 0, on a donc :

$$\begin{aligned} x + \ln(1-x) &= x - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

et donc

$$x + \ln(1-x) \sim -\frac{x^2}{2}, \qquad x \to 0.$$

On en déduit que au voisinage de 0^+ :

$$f(x) = -2\frac{x + \ln(1-x)}{x^2} \quad - 2\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = 1$$

Ainsi, $f(x) \sim 1$ donc $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 1}$.

(c) **En déduire que la fonction f est continue sur $[0,1[$.**
- La fonction f est continue sur $]0,1[$ comme quotient de fonction continues sur $]0,1[$ car $x^2 \neq 0$.
- De plus, $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0.

Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue sur } [0,1[.}$

(d) **Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que pour tout $x \in]0,1[$, on a : $f'(x) = -2\dfrac{N(x)}{x^3(1-x)}$.**
On a déjà vu que $x \mapsto \ln(1-x)$ est dérivable sur $]0,1[$.

Donc, la fonction f est dérivable sur $]0,1[$ comme quotient de fonction dérivable sur $]0,1[$ car $x^2 \neq 0$.
Pour tout $x \in]0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -2\left[\frac{\left(1+\dfrac{-1}{1-x}\right)x^2 - 2x\left(x+\ln(1-x)\right)}{x^4}\right] \\
&= -2\left[\frac{\dfrac{-x^3-2x(1-x)\left(x+\ln(1-x)\right)}{1-x}}{x^4}\right] \\
&= -2\left[\frac{-x^2-2(1-x)\left(x+\ln(1-x)\right)}{x^3(1-x)}\right] \\
&= -2\left[\frac{-x^2-2x(1-x)-2(1-x)\ln(1-x)}{x^3(1-x)}\right] \\
&= -2\left[\frac{x^2-2x-2(1-x)\ln(1-x)}{x^3(1-x)}\right] \\
&= -2\frac{N(x)}{x^3(1-x)}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in]0,1[, \text{ on a : } \; f'(x) = -2\dfrac{N(x)}{x^3(1-x)}}$.

(e) **Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,1[$.**

On a :

x	0		1
$N(x)$		$-$	
$x^3(1-x)$		$+$	
-2		$-$	
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

car $\lim_{x\to 1}\ln(1-x) = -\infty$ donc par somme, quotient et produit de limites, on a $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$

En déduire que f réalise une bijection strictement croissante de $[0,1[$ dans $[1,+\infty[$.

- La fonction f est continue sur $[0;1[$ d'après la question 2c.
- La fonction f est strictement croissante sur $[0;1[$.

Donc $\boxed{f \text{ réalise une bijection strictement croissante de } [0,1[\text{ dans } [1,+\infty[}$, d'après les limites calculées plus haut.

(f) **Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution, notée u_n sur $[0,1[$. Donner la valeur de u_1.**

- La fonction f réalise une bijection strictement croissante de $[0,1[$ dans $[1,+\infty[$.
- De plus, $n \in \mathbb{N}^*$ donc $n \in [1,+\infty[$.
- Donc, d'après le théorème de la bijection, $\boxed{\text{l'équation } f(x) = n \text{ admet une unique solution } u_n \in}$

Pour $n = 1$, comme $f(0) = 1$, on a $\boxed{u_1 = 0}$.

(g) **Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.**
On a pour tout $n \geq 1$: $\quad f(u_n) = n \iff u_n = f^{-1}(n)$.
Or, d'après les propriétés de la réciproque d'une fonction bijective, on a :

x	1		$+\infty$
$f^{-1}(x)$	0	$\nearrow$	1

ce qui montre que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} f^{-1}(n) = 1$. Ainsi, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

(3) **On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1[$:**

$$g_n(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2} f(x)\right).$$

(a) **Montrer, à l'aide de la question 2e, que pour tout $x \in [0,1[$, on a :**

$$0 \leq g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right).$$

D'après la question 2e, pour tout $x \in [0,1[$, on a : $f(x) \geq 1$.
Ainsi, pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) \geq 1 &\implies -\frac{nx^2}{2} f(x) \leq -\frac{nx^2}{2} \qquad \text{car } -\frac{nx^2}{2} \leq 0 \\ &\implies \exp\left(-\frac{nx^2}{2} f(x)\right) \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right) \qquad \text{car exp est croissante} \end{aligned}$$

Comme exp est à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$, on a : $\boxed{\text{pour tout } x \in [0,1[\ : 0 \leq g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right).}$

(b) **En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^1 g_n(x)\,dx$.**
On vient de voir que pour tout $x \in [0,1[\ : 0 \leq g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right)$.
De plus, l'intégrale $\int_0^1 \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right) \mathrm{d}x$ est convergente car la fonction $x \mapsto \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right)$ est continue sur $[0;1]$ comme composée de fonctions continues.
Donc, d'après le théorème de comparaison des intégrales des fonctions positives, on en déduit que $\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge}}$.

On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_0^1 g_n(x)\,dx.$$

(c) **Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0,1[$: $\dfrac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)} \leq 1$.**
On a pour tout $x \in [0,1[$:

$$\begin{aligned} \frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)} &= \frac{\exp\left(-\frac{(n+1)x^2}{2} f(x)\right)}{\exp\left(-\frac{nx^2}{2} f(x)\right)} \\ &= \exp\left(-\frac{nx^2 + x^2}{2} f(x) + \frac{nx^2}{2} f(x)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{x^2}{2} f(x)\right) \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$\frac{x^2}{2} f(x) \geq 0 \implies -\frac{x^2}{2} f(x) \leq 0 \implies \exp\left(-\frac{x^2}{2} f(x)\right) \leq 1 \qquad \text{par croissance de la fonction } \exp$$

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } x \in [0,1[: \ \dfrac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)} \leq 1.}$

(d) **En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.**
On déduit de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1[$:

$$g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$$

donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 g_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{soit} \quad I_{n+1} \leq I_n$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$

(e) **On note φ une densité et Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.**
Rappeler la formule définissant φ puis dresser le tableau de variation complet de Φ sur $\mathbb{R}$ en précisant la valeur de $\Phi(0)$.
La fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Cette fonction est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc la fonction de répartition Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\lim_{-\infty} \Phi(t) = 0$, $\lim_{+\infty} \Phi(t) = 1$ et $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$ car la fonction φ est paire.
On a donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\Phi(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1

(f) **Montrer l'encadrement :**

$$0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\Phi\left(\sqrt{n}\right) - \frac{1}{2}\right).$$

On pourra utiliser la question 3a puis effectuer le changement de variable $u = x\sqrt{n}$.
D'après la question 3a, pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$0 \leq g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right)$$

donc par croissance de l'intégrale, on en déduit que :

$$0 \leq \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right)\mathrm{d}x$$

Or, en posant $u = x\sqrt{n}$ (donc $u^2 = nx^2$ et $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{n}}$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right)\mathrm{d}x &= \int_0^{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{n}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} \sqrt{2\pi}\varphi(u)\mathrm{d}u\\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\int_0^{\sqrt{n}} \varphi(u)\mathrm{d}u\\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left(\Phi\left(\sqrt{n}\right) - \Phi\left(0\right)\right)\end{aligned}$$

On a donc, puisque $\Phi\left(0\right) = \dfrac{1}{2}$:

$$\boxed{0 \leq \int_0^1 g_n\left(x\right)\mathrm{d}x \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left(\Phi\left(\sqrt{n}\right) - \frac{1}{2}\right)}$$

(g) **Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :**

$$0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Comme Φ est une fonction de répartition, on a : $\Phi(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
En particulier, on a :

$$\Phi\left(\sqrt{n}\right) \leq 1$$

donc

$$\Phi\left(\sqrt{n}\right) - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

puis

$$\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left(\Phi\left(\sqrt{n}\right) - \frac{1}{2}\right) \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Ainsi, d'après la question précédente, on obtient : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\boxed{0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

(h) **Écrire un programme en `SciLab` qui détermine une valeur de n pour laquelle $I_n \leq 10^{-1}$.**
La constante π se note *%pi* en `SciLab`.
Comme on ne sait pas calculer I_n, on va chercher une valeur de n pour laquelle $\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \leq 10^{-1}$.

```
n=1
while sqrt(%pi/(2*n)) > 0.1 then
    n=n+1
disp(n)
```

(i) **Déterminer à présent par le calcul une valeur de n pour laquelle $I_n \leq 10^{-1}$. *On donne* $50\pi \approx 157.08$.**
Comme on ne sait pas calculer I_n, on va chercher une valeur de n pour laquelle $\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \leq 10^{-1}$.
Or :

$$\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \leq 0.1 \iff \frac{\pi}{2n} \leq 0.01 \iff \frac{\pi}{0.02} \leq n \iff 50\pi \leq n$$

Ainsi, comme $50\pi \approx 157.08$, pour $n = 158$, on aura $I_n \leq 10^{-1}$.