Devoir Surveillé n°3 - sujet B (type EDHEC)

Durée: 4 heures

Exercice 1

On dispose de deux jetons A et B que l'on peut placer dans deux cases C_0 et C_1, et d'un dispositif permettant de tirer au hasard et de manière équiprobable, l'une des lettre a, b ou c. Au début de l'expérience, les deux jetons sont placés dans C_0. On procède alors à une série de tirages indépendants de l'une des trois lettres a, b ou c.

À la suite de chaque tirage, on effectue l'opération suivante

- Si on tire la lettre a, on change le jeton A de case;
- Si on tire la lettre b, on change le jeton B de case;
- Si on tire la lettre c, les positions des deux jetons restent inchangées.

Partie I - Étude du mouvement du jeton A

On introduit les variables X_n (respectivement Y_n) qui valent 0 si à l'issue de la $n-$ième expérience, le jeton A (resp. le jeton B) est dans la case C_0 et 1 si il est dans la case C_1.
Naturellement, $X_0 = Y_0 = 0$.

(1) On introduit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
  (a) Justifier que M est diagonalisable.
  (b) Déterminer les valeurs propres de M et une matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.
  (c) En déduire l'expression de M^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(2) (a) Déterminer la loi de X_1.
  (b) À l'aide d'un système complet d'évènements à préciser, déterminer ensuite une matrice Q telle que
$$\begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0) \\ P(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \end{pmatrix}.$$
  (c) Expliciter Q^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
  (d) En déduire la loi de X_n.

Partie II - Étude du mouvement du couple de jetons (A, B)

On considère maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire W_n définie par $W_0 = 1$ et, à l'issue de la $n-$ième expérience décrite précédemment.

- Si A et B sont tous deux dans C_0, alors $W_n = 1$;
- Si A se trouve dans C_0 et B dans C_1, alors $W_n = 2$;
- Si A se trouve dans C_1 et B dans C_0, alors $W_n = 3$;
- Si A et B sont tous deux dans C_1, $W_n = 4$.

(4) Déterminer la loi de W_1.

(5) À l'aide d'un système complet d'évènements à préciser, déterminer une matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{pmatrix} P(W_{n+1}=1) \\ P(W_{n+1}=2) \\ P(W_{n+1}=3) \\ P(W_{n+1}=4) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} P(W_n=1) \\ P(W_n=2) \\ P(W_n=3) \\ P(W_n=4) \end{pmatrix}.$$

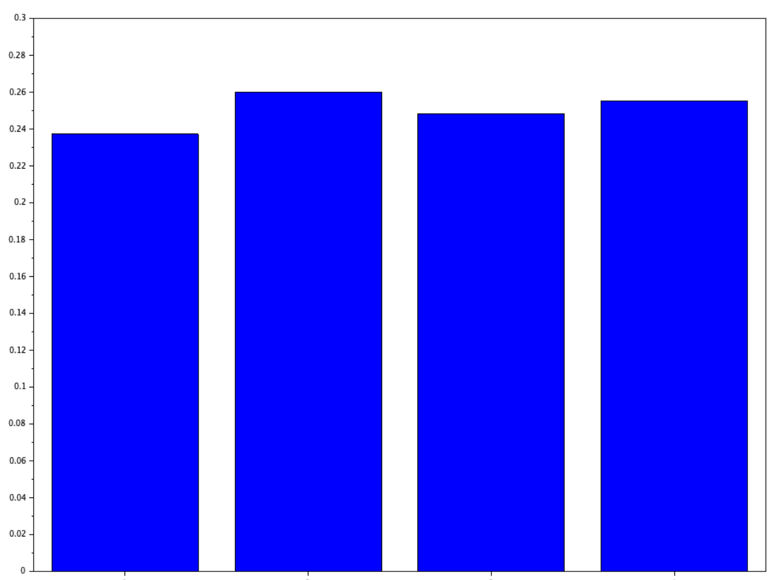
(6) Montrer que 1 est valeur propre de A. Déterminer un vecteur propre de A, associé à la valeur propre 1 dont la somme des composantes est égale à 1.

(7) Compléter la fonction `SciLab` pour qu'elle renvoie uniquement une simulation de W_n

```
function y=W(n)
A=[............................]/3;
W=grand(n, 'markov', A', 1);
y=............................
endfunction
```

(8) On écrit le script suivant dont les résultats d'exécution sont affichés ci-dessous

```
S=zeros(1, 1000)
for k=1:1000
    S(k)=W(500)
end
T=tabul(S, 'i')
bar(T(:,1), T(:,2)/1000)
```



Interpréter ce résultat. Quel est le lien avec la Question 6?

Exercice 2

Soit $\mathcal{B} = (e_0, e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On rappelle que les vecteurs de cette base sont les fonctions polynomiales définies par $e_0(t) = 1$, et, pour $k \in [\![1; n]\!]$ par $e_k(t) = t^k$.

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$, qui à P associe

$$\varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$$

où $P^{(k)}$ représente la dérivée $k-$ième de P, en adoptant la convention que $P^{(0)} = P$.

(1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
(2) Calculer $\varphi(e_0)$ et en déduire une valeur propre de φ.
(3) (a) Montrer que, pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, $\varphi(e_j) - e_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$.
  (b) En déduire que la matrice de φ dans la base canonique est triangulaire supérieure puis déterminer le spectre de φ.
  (c) Justifier que φ est un automorphisme.

(4) (a) Calculer, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P - P')$.
  (b) En déduire l'expression de $\varphi^{-1}(P)$ puis la matrice de φ^{-1} dans la base canonique $\mathcal{B}$.
  (c) Compléter le script `SciLab` suivant pour qu'il affiche la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, où n est entré par l'utilisateur.

```
n = input('n=?')
M = eye(n+1, n+1)
for k = 1:n
    M(k, k+1) = -k
end
A = .....................
disp(A)
```

Exercice 3

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$, la fonction f_n par

$$f_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

(1) (a) En considérant la fonction de densité de la loi normale centrée-réduite, justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_0(t)\mathrm{d}t$ et préciser sa valeur.
  (b) À l'aide d'une relation de négligeabilité, montrer la convergence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t.$$

(2) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

(3) Calculer I_1.

(4) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!}, \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = 2^n n!$$

Problème

Dans tout l'exercice, on considère une variable aléatoire X à valeurs positives définie sur un certain espace probabilisé, de fonction de répartition F. Selon les questions, X peut être à densité ou discrète. Dans le cas où X est à densité, on notera f une densité de X.
On considère également une suite (X_n) de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi que X. On note alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$Y_n = \min(X_1, X_2, ..., X_n).$$

On admet que Y_n est encore une variable aléatoire, définie sur le même espace probabilisé, et on note F_n sa fonction de répartition.

On dit que la loi de X est **implosive** si X n'admet pas d'espérance mais s'il existe un entier $m \geq 2$ tel que Y_m admet une espérance. Auquel cas, on appelle **indice d'implosion** le plus petit entier $m \geq 2$ tel que Y_m admet une espérance.

Partie I - Un exemple discret

On suppose dans cette première partie, et dans cette partie uniquement, que X est une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(X = k) = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}.$$

(1) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$.

(2) (a) Montrer que

$$P(X = k) \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2k\sqrt{k}}.$$

(b) En déduire que X n'admet pas d'espérance.

(3) Expliciter, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F(k)$.

(4) (a) Déterminer la loi de Y_2. Admet-elle une espérance?
(b) Mêmes questions avec Y_3.
(c) La loi de X est-elle implosive? Si oui, quelle est son indice d'implosion?

Partie II - Lois implosives à indice fixé

Soit $\alpha > 1$ fixé. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ \dfrac{a}{x^\alpha}, & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

(5) Déterminer la valeur du réel a pour que f soit une densité de probabilité.

Dans la suite de cette partie, X est une variable aléatoire admettant f comme densité.

(6) (a) Déterminer la fonction de répartition F de X.
(b) Discuter, en fonction de α, l'existence de l'espérance de X.

(7) (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $F_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n$.
(b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^{n(\alpha-1)}}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(8) Discuter, en fonction de n et de α, l'existence de l'espérance de Y_n.

(9) Conclure alors que, pour tout entier $m \geq 2$, il existe une variable aléatoire à densité dont la loi est implosive, d'indice d'implosion m.

Partie III - De l'existence de lois non implosives

(10) Montrer que, pour tout $\beta > 0$, on a

$$\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{\ln^\beta(x)}\right), \quad x \to +\infty.$$

En déduire la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\ln^\beta(x)}$.

(11) À l'aide du changement de variable $u = \ln(x)$, déterminer un réel a tel que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 2, \\ \dfrac{a}{x \ln^2(x)}, & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

soit une densité de probabilité.

Dans la suite de cette partie, X est une variable aléatoire admettant f comme densité.

(12) (a) Déterminer la fonction de répartition F de X.
(b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

(13) Montrer, en reprenant le calcul de la Question 7a, qu'une densité de Y_n, pour $n \geq 2$, est donnée par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{n(\ln(2))^n}{x(\ln(x))^{n+1}}, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

(14) Conclure que la loi de X n'est pas implosive.