Devoir Surveillé n°3 - sujet B (type EDHEC)

Solution

Exercice 1

Exercice inspiré d'un vieux sujet **HEC Maths 3, 2000**, voie E.

On dispose de deux jetons A et B que l'on peut placer dans deux cases C_0 et C_1, et d'un dispositif permettant de tirer au hasard et de manière équiprobable, l'une des lettre a, b ou c. Au début de l'expérience, les deux jetons sont placés dans C_0. On procède alors à une série de tirages indépendants de l'une des trois lettres a, b ou c.

À la suite de chaque tirage, on effectue l'opération suivante

- Si on tire la lettre a, on change le jeton A de case;
- Si on tire la lettre b, on change le jeton B de case;
- Si on tire la lettre c, les positions des deux jetons restent inchangées.

Partie I - Étude du mouvement du jeton A

On introduit les variables X_n (respectivement Y_n) qui valent 0 si à l'issue de la $n-$ième expérience, le jeton A (resp. le jeton B) est dans la case C_0 et 1 si il est dans la case C_1.
Naturellement, $X_0 = Y_0 = 0$.

(1) On introduit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) La matrice M est symétrique donc diagonalisable, d'après le cours.

(b) On cherche les valeurs propres à l'aide du déterminant. Plus précisément,

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } M &\iff M - \lambda I \text{ non inversible} \\ &\iff \det(M - \lambda I) = 0 \\ &\iff \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \\ &\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 3. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathrm{Sp}(M) = \{1; 3\}.$$

On cherche donc une base de vecteurs propres vers laquelle P sera la matrice de passage. Plus précisément, d'une part

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\iff x+y=0$$

Donc $E_1=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

D'autre part,

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\iff -x+y=0$$

Donc $E_3=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Par concaténation, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ forme une base de $\mathcal{M}_{2,1}$ formée de vecteurs propres de M. La matrice P de passage, explicitée ci-après, de la base canonique vers cette nouvelle base est en particulier inversible. En posant

$$P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix},$$

on a bien

$$M=PDP^{-1}\iff P^{-1}MP=D$$

avec D diagonale.

(c) Une récurrence immédiate mène à

$$M^n=PD^nP^{-1}.$$

Or, un rapide pivot de Gauss donne

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}M^n &= PD^nP^{-1}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&3^n\\-1&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+3^n&3^n-1\\3^n-1&1+3^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

En déduire l'expression de M^n, pour $n\in\mathbb{N}^*$.

(2) (a) On introduit les évènements A_i (resp. B_i, C_i) "on pioche la lettre a au $i-$ème tirage " (resp. "la lettre b", "la lettre c"). Il est clair que $X_1(\Omega)=\{0;1\}$ et

$$P(X_1=1)=P(A_1)=\frac{1}{3},\qquad P(X_1=0)=\frac{2}{3}.$$

(b) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on admet raisonnablement que $\{(X_n=0),(X_n=1)\}$ est un système complet d'évènements. En lui appliquant la formule des probabilités totales, on obtient

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=0) &= P_{X_n=0}(X_{n+1}=0)P(X_n=0)+P_{X_n=1}(X_{n+1}=0)P(X_n=1)\\ &= \frac{2}{3}P(X_n=0)+\frac{1}{3}P(X_n=1)\end{aligned}$$

car

$$P_{X_n=0}(X_{n+1}=0)=P(B_{n+1}\cup C_{n+1})=\frac{2}{3},\quad P_{X_n=1}(X_{n+1}=0)=P(A_{n+1})=\frac{1}{3}.$$

Avec le même raisonnement, on obtient

$$P(X_{n+1}=1)=\frac{1}{3}P(X_n=0)+\frac{2}{3}P(X_n=1).$$

On peut donc écrire

$$\begin{pmatrix}P(X_{n+1}=0)\\P(X_{n+1}=1)\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P(X_n=0)\\P(X_n=1)\end{pmatrix}.$$

Il suffit donc de prendre $Q=\frac{1}{3}M$, où M est la matrice étudiée précédemment.

(c) D'après ce qu'on a déjà calculé, on a

$$Q^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+3^n&3^n-1\\3^n-1&1+3^n\end{pmatrix}.$$

(d) Comme $\begin{pmatrix}P(X_{n+1}=0)\\P(X_{n+1}=1)\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}P(X_n=0)\\P(X_n=1)\end{pmatrix}$, une récurrence immédiate donne

$$\begin{pmatrix}P(X_{n+1}=0)\\P(X_{n+1}=1)\end{pmatrix}=Q^n\begin{pmatrix}P(X_1=0)\\P(X_1=1)\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+3^n&3^n-1\\3^n-1&1+3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2/3\\1/3\end{pmatrix}.$$

On en déduit donc

$$P(X_n=0)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3^n}\right),\qquad P(X_n=1)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

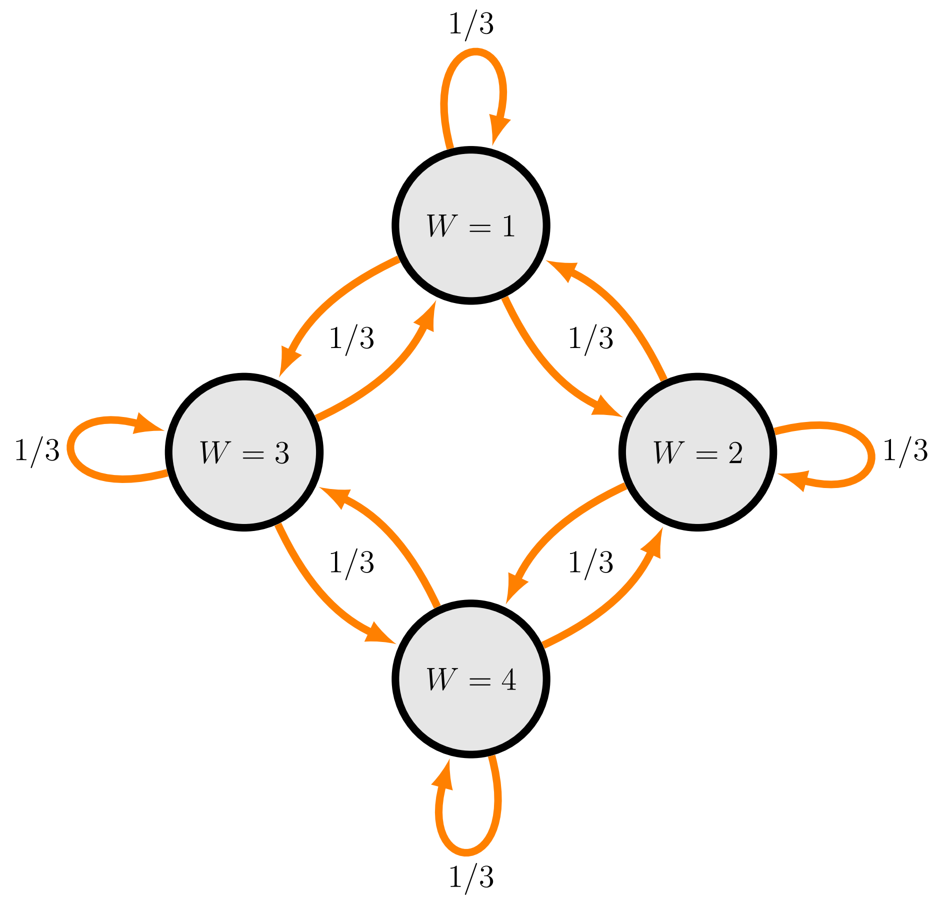
Partie II - Étude du mouvement du couple de jetons (A,B)

On considère maintenant, pour $n\in\mathbb{N}$, la variable aléatoire W_n définie par $W_0=1$ et, à l'issue de la $n-$ième expérience décrite précédemment.

- Si A et B sont tous deux dans C_0, alors $W_n=1$;
- Si A se trouve dans C_0 et B dans C_1, alors $W_n=2$;
- Si A se trouve dans C_1 et B dans C_0, alors $W_n=3$;
- Si A et B sont tous deux dans C_1, $W_n=4$.

On peut (et ce n'est nullement une nécessité mais c'est pratique), pour fixer les idées, commencer par dessiner le *diagramme de transition* de la *chaîne de Markov* (W_n).

Ici les probabilités sur chacune des arêtes sont les mêmes; elles valent toutes 1/3. Chaque changement d'état correspond au tirage d'une lettre et une seule et ces tirages sont équiprobables.



(4) Partant de $W_0 = 1$, on voit que $W_1(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et que ces trois états, correspondants à chacun des trois tirages possible pour la lettre, sont équiprobables. On a donc

$$P(W_1 = 1) = P(W_1 = 2) = P(W_1 = 3) = \frac{1}{3}.$$

(5) On peut admettre, car c'est un peu laborieux à démontrer, que $\{(W_n = i)\ i \in [\![1; 4]\!]\}$ forme un système complet d'évènements pour $n \geq 2$. En lui appliquant la formule des probabilités totales, en tenant compte des probabilités de transition qui apparaissent dans le diagramme ci-dessus, on obtient

$$\begin{pmatrix} P(W_{n+1} = 1) \\ P(W_{n+1} = 2) \\ P(W_{n+1} = 3) \\ P(W_{n+1} = 4) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(W_n = 1) \\ P(W_n = 2) \\ P(W_n = 3) \\ P(W_n = 4) \end{pmatrix}.$$

(6) C'est un simple calcul. En effet,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ici, on a pensé à essayer le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1. On peut aussi voir que

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est clairement non inversible (deux couples de colonnes égales). En résolvant $AX = X$ on trouve une base de E_1 (qui sera de dimension 2 car le rang de la matrice $A - I$ ci-dessus est clairement égal à 2). Bref. Le vecteur précédemment exhibé ne satisfait pas à la condition demandée; on divise chacune de ces composantes par la somme de celles-ci. Ainsi,

$$\ell = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

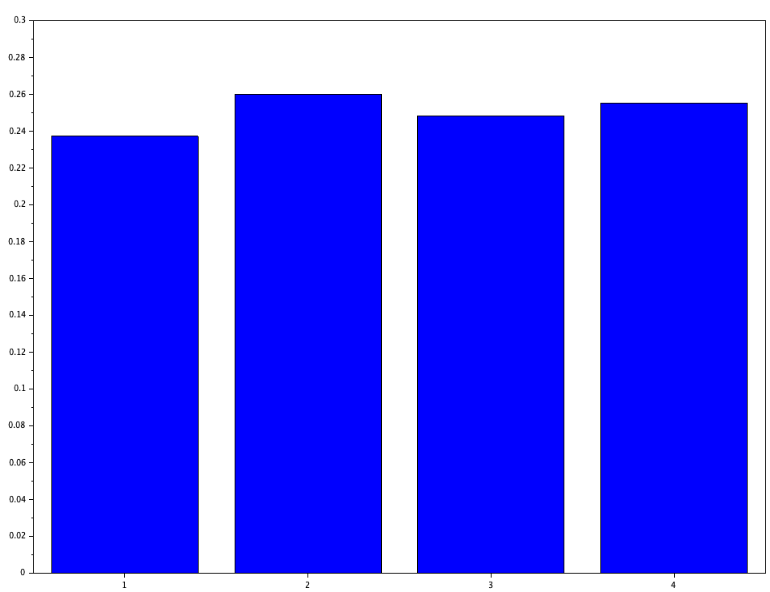
est vecteur propre *stochastique* (la somme de ses composantes vaut 1) de A, associé à la valeur propre 1.

(7) Il ne faut garder que la dernière composante du résultat de la commande `grand()` avec l'argument `'markov'`, sinon on a toute la *trajectoire* de la chaîne.

```
function y=W(n)
A=[1, 1, 1, 0; 1, 1, 0, 1; 1, 0, 1, 1; 0, 1, 1, 1]/3;
W=grand(n, 'markov', A', 1);
y=W(n)
endfunction
```

(8) On écrit le script suivant dont les résultats d'exécution sont affichés ci-dessous

```
S=zeros(1, 1000)
for k=1:1000
    S(k)=W(500) //on fait donc 1000 simulation de W_500
end
T=tabul(S, 'i') //on classe les valeurs obtenues
bar(T(:,1), T(:,2)/1000) //on représente le diagramme des fréquences
```



La représentation obtenue laisse conjecturer que W_{500} suit une loi uniforme sur $[\![1;4]\!]$, c'est à dire que pour n grand, chacun des quatre états semble équiprobable. Si la chaîne (W_n) *converge*[1] vers une *loi limite* ℓ, la relation $W_{n+1} = AW_n$ *donne* $A\ell = \ell$ et ℓ est vecteur propre (stochastique - c'est une distribution de probabilité!) associé à la valeur propre 1, qu'on appelle aussi *état stationnaire*. C'est bien ce qu'on a trouvé à la question 6.

[1] Encore faut-il avoir donné un sens à cette notion de convergence...

Exercice 2

Exercice inspiré par **EDHEC 2017**, série S.

Soit $\mathcal{B} = (e_0, e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On rappelle que les vecteurs de cette base sont les fonctions polynomiales définies par $e_0(t) = 1$, et, pour $k \in [\![1; n]\!]$ par $e_k(t) = t^k$.

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$, qui à P associe

$$\varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$$

où $P^{(k)}$ représente la dérivée $k-$ième de P, en adoptant la convention que $P^{(0)} = P$.

(1) Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P^{(k)} \in \mathbb{R}_n[X]$, φ est donc bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a:

$$\varphi(\lambda P + Q) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda P + Q)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\lambda P^{(k)} + Q^{(k)}\right) = \lambda \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)} = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$$

et φ est alors bien linéaire. Ainsi, φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(2) e_0 est le polynôme constant égal à 1, donc pour tout $k \geqslant 1$, $(e_0)^{(k)}$ est nul. Donc

$$\varphi(e_0) = \sum_{k=0}^{n} (e_0)^{(k)} = e_0$$

De plus, e_0 n'est pas le polynôme nul. Ainsi, 1 est valeur propre de φ et e_0 est un vecteur propre associé à 1.

(3) (a) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On a :

$$\varphi(e_j) - e_j = e_j + \sum_{k=1}^{n} (e_j)^{(k)} - e_j = \sum_{k=1}^{n} (e_j)^{(k)}$$

Or, $e_j \in \mathbb{R}_j[X]$ avec $j \geqslant 1$, donc pour tout entier $k \geqslant 1$, $(e_j)^{(k)}$ appartient à l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{j-1}[X]$ (on dérive chaque polynôme au moins une fois). En conclusion, pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, on a bien $\varphi(e_j) - e_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$.

(b) D'après les questions précédentes, $\varphi(e_0) = e_0$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe $Q_{j-1} \in \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_{j-1})$ tel que $\varphi(e_j) = Q_{j-1} + e_j$. La matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice étant triangulaire, les valeurs propres de φ sont alors les coefficients diagonaux, et donc

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \{1\}.$$

(c) Comme 0 n'est pas valeur propre, la matrice ci-dessus est inversible ou encore φ est bijectif: c'est un automorphisme.

(4) (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a $P' = P^{(1)} \in \mathbb{R}_n[X]$ et par télescopage :

$$\varphi(P - P') = \sum_{k=0}^{n} (P - P')^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \left(P^{(k)} - P^{(k+1)}\right) = P - P^{(n+1)}.$$

Or, $P \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $P^{(n+1)}$ est nul. Au final,

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \varphi(P - P') = P.$$

(b) Posons $\psi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par $\psi(P) = P - P'$. ψ est clairement un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et d'après la question précédente $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}$. Il suit que $\varphi^{-1} = \psi$ ou encore

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \varphi^{-1}(P) = P - P'.$$

La matrice de φ^{-1} dans $\mathcal{B}$ s'obtient sans difficulté. En effet, $\varphi^{-1}(e_0) = e_0$, $\varphi^{-1}(e_1) = e_1 - e_0$. Plus généralement, remarquant que $e_k' = ke_{k-1}$, on a

$$\varphi^{-1}(e_k) = e_k - e_k' = e_k - ke_{k-1},$$

et donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -k \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Le début du script `SciLab` donné permet clairement de construire la matrice de φ^{-1} (dans $\mathcal{B}$). Il suffit donc d'en prendre l'inverse pour obtenir la matrice de φ dans cette même base.

```
n = input('n=?')
M = eye(n+1, n+1)
for k = 1:n
    M(k, k+1) = -k
end
A = inv(M) // on pouvait aussi écrire M^(-1)
disp(A)
```

Exercice 3

Inspiré par un exercice de l'**ORAL ESM**, 2019.

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$, la fonction f_n par

$$f_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

(1) (a) La fonction de densité de la loi normale est donnée par

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{f_0(x)}{\sqrt{2\pi}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On sait que φ est paire, et que son intégrale sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 1. Il en découle que l'intégrale de f_0 sur $[0; +\infty[$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} f_0(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

(b) L'intégrale est impropre en $+\infty$; sur $[0;1]$, f_n est continue et l'intégrale existe. Par croissance comparée, on a

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{n+2}e^{-x^2+2} = 0$$

ou encore que,

$$f_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad x \to +\infty.$$

Comme, par le critère de Riemann, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge et que la fonction f_n est positive, le critère de comparaison par négligeabilité permet d'affirmer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ est également convergente. Au final, on a bien la convergence de l'intégrale considérée. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t.$$

(2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A > 0$. On va procéder par intégration par parties, et ce manière un peu astucieuse dans le "découpage" de la fonction dans l'intégrale. En effet, posons

$$\left\{\begin{array}{rcl} u' & = & xe^{-x^2/2} \\ v & = & x^{n+1} \end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcl} u & = & -e^{-x^2/2} \\ v & = & (n+1)x^n \end{array}\right.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;A]$ rendant l'intégration par parties licite et permettant d'écrire

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^A x^{n+2}e^{-x^2/2}\mathrm{d}x & = & \left[-x^{n+1}e^{-x^2/2}\right]_0^A + (n+1)\displaystyle\int_0^A x^n e^{-x^2/2}\mathrm{d}x \\ & = & -A^{n+1}e^{-A^2/2} + (n+1)\displaystyle\int_0^A f_n(x)\mathrm{d}x \\ & \underset{A+\to+\infty}{\longrightarrow} & (n+1)I_{n-2} \end{array}$$

par croissance comparée et car $\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ converge. Au final, on a bien

$$I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

(3) Soit $A > 0$.

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^A xe^{-x^2/2}\mathrm{d}x & = & \left[-e^{x^2}/2\right]_0^A \\ & = & -e^{-A^2/2} + 1 \\ & \underset{A+\to+\infty}{\longrightarrow} & 1. \end{array}$$

Ainsi, on a $I_1 = 1$.

(4) Montrons les formules demandées par récurrences.

- <u>Initialisation.</u> Pour $n = 0$, on a

$$I_0 = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(0)!}{2^0 0!}$$

car $0! = 1$.On a également

$$I_1 = 1 = 2^0 0!.$$

Donc les formules sont vraies pour $n = 0$.

- Hérédité. Supposons les deux formules vérifiées pour un certain $n \in \mathbb{N}$. D'une part

$$\begin{aligned} I_{2(n+1)} &= I_{2n+2} = (n+1)I_n \\ &= (2n+1)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!} \qquad \text{(par HR)} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!} \\ &= \frac{(2n+2)!}{2(n+1)2^n n!}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{(2(n+1)!}{2^{n+1}(n+1)!}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

ce qui est bien la première formule au rang $n+1$. D'autre part,

$$\begin{aligned} I_{2(n+1)+1} &= I_{2n+3} = (2n+2)I_{2n+1} \\ &= (2n+2)2^n n! = 2(n+1)2^n n! \\ &= 2^{n+1}(n+1)! \end{aligned}$$

et on a encore l'autre formule au rang $n+1$, ce qui termine la récurrence.

Problème

Problème inspiré du sujet **ECRICOME 2015**, série S.

Dans tout l'exercice, on considère une variable aléatoire X à valeurs positives définie sur un certain espace probabilisé, de fonction de répartition F. Selon les questions, X peut être à densité ou discrète. Dans le cas où X est à densité, on notera f une densité de X.
On considère également une suite (X_n) de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi que X. On note alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$Y_n = \min(X_1, X_2, ..., X_n).$$

On admet que Y_n est encore une variable aléatoire, définie sur le même espace probabilisé, et on note F_n sa fonction de répartition.

On dit que la loi de X est **implosive** si X n'admet pas d'espérance mais s'il existe un entier $m \geq 2$ tel que Y_m admet une espérance. Auquel cas, on appelle **indice d'implosion** le plus petit entier $m \geq 2$ tel que Y_m admet une espérance.

Partie I - Un exemple discret

On suppose dans cette première partie, et dans cette partie uniquement, que X est une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(X=k) = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}.$$

(1) On calcule la limite de la somme partielle, à l'aide d'une somme télescopique. Plus précisément, Si $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} P(X=k) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)\\ &= 1-\frac{1}{\sqrt{n+2}} \qquad \text{(par télescopage)}\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,\end{aligned}$$

ce qui donne bien le résultat demandé.

(2) (a) On utilise l'expression conjuguée

$$\begin{aligned}P(X=k) &= \frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+2}} = \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}\\ &= \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \times \frac{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}\left(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}\right)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{k^1+3k+6}\sqrt{k}\left(\sqrt{1+2/k}+\sqrt{1+1/k}\right)}\\ &\sim \frac{1}{2k\sqrt{k}},\end{aligned}$$

ce qui est bien l'équivalence attendue.

(b) X admet une espérance si et seulement si la série $\sum kP(X=k)$ converge (absolument). Or, d'après la question précédente,

$$kP(X=k) \sim \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

Comme, d'après le critère de Riemann, la série $\sum_{k\geq 1} 1/\sqrt{k}$ diverge, on peut conclure par critère d'équivalence pour les séries, que X n'admet pas d'espérance.

(3) Soit $k \in \mathbb{N}$. Par définition,

$$\begin{aligned}F(k) &= P(X\leq k) = \sum_{j=0^k} P(X=j)\\ &= \sum_{j=0}^{k}\left(\frac{1}{\sqrt{j+1}}-\frac{1}{\sqrt{j+2}}\right)\\ &= 1-\frac{1}{\sqrt{k+2}}, \qquad \text{(par télescopage)}\end{aligned}$$

(4) (a) $Y_2 = \min(X_1, X_2)$, où X_1 et X_2 sont des variables indépendantes qui suivent la même loi que X. Ainsi,

$$\begin{aligned}P(Y_2>k) &= P(X_1>k\cap X_2>k)\\ &= P(X_1>k)P(X_2>k) \qquad \text{(par indépendance)}\\ &= P(X_1>k)^2 \qquad \text{(car } X_1 \text{ et} X_2 \text{ suivent la même loi)}\\ &= (1-F(k))^2 = \frac{1}{k+2}.\end{aligned}$$

Or,

$$P(Y_2=k)=P(Y_2>k-1)-P(Y_2>k)=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}=\frac{1}{(k+1)(k+2)}\sim\frac{1}{k^2}.$$

Donc la série $\sum kP(Y_2=k)$ diverge (son terme général est équivalent à la série harmonique).

(b) On reprend la méthode précédente.

$$\begin{aligned}
P(Y_3>k) &= P(X_1>k\cap X_2>k\cap X_3>k)\\
&= P(X_1>k)P(X_2>k)P(X_3>k) \qquad \text{(par indépendance)}\\
&= P(X_1>k)^3 \qquad \text{(car } X_1,X_2,X_3 \text{ suivent la même loi)}\\
&= (1-F(k))^3=\frac{1}{(k+2)\sqrt{k+2}}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
P(Y_3=k) &= P(Y_3>k-1)-P(Y_3>k)\\
&= \frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}}-\frac{1}{(k+2)\sqrt{k+2}}\\
&= \frac{(k+2)^3-(k+1)^3}{(k+1)(k+2)\sqrt{(k+1)(k+2)}\left((k+2)\sqrt{k+2}+(k+1)\sqrt{k+1}\right)}\\
&\sim \frac{3k^2}{2k^3k^{3/2}}=\frac{3}{2k^{5/2}}
\end{aligned}$$

Il suit que

$$kP(Y_3=k)\sim\frac{3}{2k^{3/2}}$$

et, par équivalence à une série de Riemann convergente, Y_3 admet une espérance.

(c) X n'admet pas d'espérance, Y_2 non plus mais Y_3 oui. Donc, la loi de X est implosive et son indice d'implosion vaut 3.

Partie II - Lois implosives à indice fixé

Soit $\alpha>1$ fixé. On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x<1,\\ \dfrac{a}{x^\alpha}, & \text{si } x\geqslant 1\end{cases}$$

(5) Pour que f soit positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, il faut déjà imposer que $a\geq 0$. Sur chacun des deux intervalles définissant f, celle-ci est continue (comme fonction constante d'une part, et comme inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas d'autre part). Il reste à vérifier et à choisir a de sorte que l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ soit convergente et soit égale à 1. Comme f est nulle sur $]-\infty;1[$, on se ramène à l'intégrale sur $[1;+\infty[$. Soit $A>1$.

$$\begin{aligned}
\int_1^A f(x)\mathrm{d}x &= \int_1^A\frac{a\mathrm{d}x}{x^\alpha}\\
&= \left[-\frac{a}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\right]_1^A\\
&= \frac{a}{\alpha-1}-\frac{a}{(\alpha-1)A^{\alpha-1}}\\
&\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{\alpha-1}
\end{aligned}$$

car $\alpha>1$. Ainsi, f est une densité de probabilité si et seulement si $a=\alpha-1$.

Dans la suite de cette partie, X est une variable aléatoire admettant f comme densité.

(6) (a) Si $x < 1$, alors $F(x) = P(X \leq x) = 0$. Soit donc $x \geq 1$.

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t \\ &= 1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}. \end{aligned}$$

Au final,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(b) Comme f est nulle en dehors de $[1; +\infty[$,

$$\begin{aligned} X \text{ admet une espérance} &\iff \int_1^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \text{ converge} \\ &\iff \int_1^{+\infty} \frac{(\alpha-1)\mathrm{d}x}{x^{\alpha-2}} \text{ converge} \\ &\iff \alpha - 2 > 1 \qquad \text{(par critère de Riemann)} \\ &\iff \alpha > 3. \end{aligned}$$

(7) (a) Soit $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P(Y_n \leq x) = 1 - P(Y_n > x) \\ &= 1 - P((X_1 > x) \cap (X_2 > x) \cap \cdots \cap (X_n > x)) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^{n} P(X_k > x) \qquad \text{(par indépendance des } X_k\text{)} \\ &= 1 - (1 - F(x))^n \qquad \text{(car les } X_k \text{ suivent toutes la même loi que } X\text{)} \end{aligned}$$

(b) En utilisant le résultat trouvé ci-avant, comme $1 - F(x) = 1$ si $x < 1$ et $1 - F(x) = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ si $x \geq 1$, on a bien

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^{n(\alpha-1)}}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(8) D'après la question précédente, on voit que Y_n est une variable à densité (F_n est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur chacun des deux intervalles). Une densité est donnée par $f_n = F_n'$ c'est à dire

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{n(\alpha-1)}{x^{n(\alpha-1)+1}}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} Y_n \text{ admet une espérance} &\iff \int_1^{+\infty} xf_n(x)\mathrm{d}x \text{ converge} \\ &\iff \int_1^{+\infty} \frac{n(\alpha-1)}{x^{n(\alpha-1)}}\mathrm{d}x \text{ converge} \\ &\iff \alpha n(\alpha - 1) > 1 \qquad \text{(par critère de Riemann)} \\ &\iff \alpha > \frac{1}{n} + 1 \end{aligned}$$

(9) Soit $m \geq 2$. On veut donc trouver une variable aléatoire X qui n'admet pas d'espérance telle que Y_{m-1} n'en admette pas non plus, mais avec Y_m qui admet une espérance. D'après les questions précédentes, il suffit de prendre X qui de densité f avec

$$\alpha = \frac{1}{m} + 1 = \frac{m+1}{m}.$$

On remarque en effet que ce choix de α garantit que X n'admet pas d'espérance (car $\alpha \leq 3$) et que m est bien le plus petit indice n tel que Y_n admette une espérance.

Partie III - De l'existence de lois non implosives

(10) C'est tout simplement un résultat de croissance comparée

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^{\beta}(x)}{x} = 0.$$

Ainsi, on a ben

$$\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{\ln^{\beta}(x)}\right), \quad x \to +\infty.$$

Comme

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

diverge (critère de Riemann), le critère de comparaison par négligeabilité pour les intégrales (qu'on a plutôt l'habitude d'utiliser dans l'autre sens !) permet d'affirmer que l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\ln^{\beta}(x)}.$$

diverge.

(11) Soit f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 2, \\ \dfrac{a}{x\ln^2(x)}, & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Comme précédemment, il est tout d'abord nécessaire que $a \geq 0$. Les deux morceaux définissant cette fonction sont bien continus sur leurs intervalles respectifs (fonction constante et inverse du produit de fonctions usuelles de s'annulant pas). Soit $A > 2$. On suit la recommandation du changement de variable $u = \ln(t)$ (qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2; A]$ donc licite). La formule de changement donne notamment

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

pour enfin écrire

$$\begin{aligned} \int_2^A \frac{a}{t\ln^2(t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}t &= \int_{\ln(2)}^{\ln(A)} \frac{a\mathrm{d}u}{u^2} \\ &= \left[-\frac{a}{u}\right]_{\ln(2)}^{\ln(A)} \\ &= \frac{a}{\ln(2)} - \frac{a}{\ln(A)} \\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{\ln(2)}. \end{aligned}$$

Il suit que f est une densité de probabilité si et seulement si $a = \ln(2)$.

Dans la suite de cette partie, X est une variable aléatoire admettant f comme densité.

(12) (a) Sans difficulté. Si $x < 2$, alors $F(x) = 0$. Si $x \geq 2$

$$F(x) = \int_2^x \frac{\ln(2)}{t\ln^2(t)}\mathrm{d}t = 1 - \frac{\ln(2)}{\ln(x)}.$$

Au final, on a

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 2 \\ 1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(x)}, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

(b) Comme précédemment,

$$X \text{ admet une espérance} \iff \int_2^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \text{ converge}$$
$$\iff \int_2^{+\infty} \frac{\ln(2)\mathrm{d}x}{\ln(x)} \text{ converge}$$

Or cette intégrale diverge d'après la Question 10 avec $\beta = 1$. Donc X n'admet pas d'espérance.

(13) En reprenant les calculs de la Question 7a, on a $F_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n$ donc

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 2 \\ 1 - \left(\dfrac{\ln(2)}{\ln(x)}\right)^n, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

La fonction F_n ayant les "bonnes propriétés", Y_n est bien une variable à densité et une densité s'obtient en dérivant F_n ce qui donne bien

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{n(\ln(2))^n}{x(\ln(x))^{n+1}}, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

(14) Il suit alors que

$$Y_n \text{ admet une espérance} \iff \int_2^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \text{ converge}$$
$$\iff \int_2^{+\infty} \frac{n(\ln(2))^n}{(\ln(x))^{n+1}}\mathrm{d}x \text{ converge}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, cette intégrale diverge (Question 10 avec $\beta = n + 1$). Ainsi, la loi de X n'est pas implosive.