Exercices $\star\star$

Mars 2020

Exercice 1

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f_n(x) = x^{n+1} + x^n.$$

(1) (a) Justifier que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifier que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n'(x) = x^{n-1}((n+1)x+n).$$

(b) En déduire, suivant la parité de n, le tableau de variations de f_n.

(c) Montrer que dans tous les cas
$$f_n\left(-\frac{n}{n+1}\right) < 2.$$

(d) Calculer $f_n(1)$ et en déduire, suivant la parité de n, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x
$$x^{n+1} + x^n = 2.$$

(2) On introduit les deux matrices A et D définies par
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer une matrice P telle que $AP = PD$, où P de la forme $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$.

(b) Montrer que P est inversible et en déduire D en fonction de A, P et P^{-1}.

(3) On considère l'équation matricielle d'inconnue X matrice carrée de taille 2
$$(E_n) \quad X^{n+1} + X^n = A.$$

(a) En posant $Y = P^{-1}XP$, montrer que X solution de (E_n) est équivalent à Y solution de
$$(E_n') \quad Y^{n+1} + Y^n = D.$$

(b) Soit Y une solution de (E'_n). On pose

$$Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

(i) Montrer que, si Y solution de (E'_n), alors Y et D commutent.
(ii) En déduire que $b = c = 0$.
(iii) Quelle sont les valeurs possibles de a?
(iv) Discuter, suivant les valeurs de n, le nombre de solutions de l'équation (E_n).

(c) On note α la solution négative de l'équation numérique $x^4 + x^3 = 2$. Déterminer les solutions de l'équation (E_3) à l'aide de α.

Exercice 2

On considère un paramètre entier $m \geq 2$ et une variable aléatoire $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ (où $p \in [0;1]$).

(1) Rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance de Y, puis à l'aide de la formule de Huygens-Kœnig, montrer que

$$E(Y(Y-1)) = m(m-1)p^2.$$

(2) On considère maintenant une première suite de variables aléatoires (U_n) telle que, pour tout $n \geq 1$, U_n suit une loi uniforme sur $\left\{0; \frac{1}{n}; ...; \frac{n-1}{n}\right\}$, c'est à dire que, pour tout $l \in [\![0; n-1]\!]$,

$$P\left(U_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n},$$

et une seconde suite de variables aléatoires (X_n) définie conditionnellement:

$$\text{Sachant que } \left(U_n = \frac{k}{n}\right), \quad X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right).$$

(a) Donner la loi de X_1.
(b) Soit $n \geq 2$. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que, pour tout $i \in [\![0; m]\!]$,

$$P(X_n = i) = \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

(3) Utiliser la première question pour donner, sans calcul supplémentaire, la valeur de la somme

$$\sum_{i=0}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

(4) En déduire alors que

$$E(X_n) = \frac{m(n-1)}{2n}.$$

(5) En utilisant à nouveau la première question, donner sans calcul la valeur de la somme

$$\sum_{i=0}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

(On citera le théorème utilisé en justification.)

(6) En déduire que

$$E(X_n(X_n-1)) = \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

puis que

$$V(X_n) = \frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2}.$$

Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère l'équation

$$e^x + x - n = 0.$$

(1) Montrer que l'équation admet une unique solution que l'on notera u_n.

(2) Montrer que u_n tend vers $+\infty$, lorsque $n \to +\infty$.

(3) On veut alors savoir à quelle "vitesse" la suite (u_n) tend vers l'infini.

(a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$u_n + \ln\left(1 + u_n e^{-u_n}\right) = \ln(n).$$

(b) Quelle est la limite de $u_n e^{-u_n}$?

(c) À l'aide de la limite usuelle $\ln(1+u)/u$ en 0, montrer que

$$\frac{\ln(n)}{u_n} = 1 + \frac{\ln\left(1 + u_n e^{-u_n}\right)}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On dit[1] *que u_n est équivalent à $\ln(n)$ lorsque $n \to +\infty$, ce qu'on écrira*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

[1] Tout ceci sera détaillé dans le Chapitre 1 du cours de Seconde année