ECE 1 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Exercices $\star\star$ - Fiche n°2

Autour des coefficients binomiaux
Mars-Avril 2020

Exercice 1

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Le but est de calculer la probabilité $a = P(A)$ où A est l'évènement "X est pair".

(1) On introduit $Y = (-1)^X$. Quelle est la loi de Y? Expliciter son espérance en fonction de a.
(2) Calculer, à l'aide du théorème de transfert, l'espérance de Y en fonction de n et de p. Conclure.

Exercice 2

On considère une urne constituée de n boules, dont k sont blanches et $n - k$ sont noires. On tire successivement et sans remise toutes les boules de l'urne (on fait donc n tirages), et on note X le numéro du tirage amenant la dernière boule blanche.

(1) Que vaut $X(\Omega)$? Justifier.

(2) À l'aide de la formule des probabilités composées, montrer que

$$P(X = k) = \frac{k!}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} = \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

(3) Soit $i \in [\![k; n]\!]$.
   (a) Montrer qu'il y a $\binom{i-1}{k-1}$ tirages correspondant à l'évènement $(X = i)$, et que ces tirages ont tous la même probabilité de se produire.
   (b) En déduire que, pour tout $i \in X(\Omega)$,

$$P(X = i) = \frac{\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}.$$

(4) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{j=k-1}^{n-1} \binom{i}{k-1}$.

(5) Calculer $E(X)$.

Exercice 3

Partie 1 - Préliminaires

On considère la suite (H_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(1) Montrer que (H_n) est croissante.
(2) Montrer que $H_{2n} - H_n \geq 1/2$.
(3) On suppose que (H_n) est convergente vers une certaine limite ℓ. Quelle est alors la limite de (H_{2n})? En déduire une contradiction puis que

$$\lim_{n \to +\infty} H_n = +\infty.$$

Partie 2 - Étude de suites

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$u_n = \frac{1}{\binom{n+p}{n}} \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

(4) Montrer que si $p = 0$ ou si $p = 1$ la suite (S_n) diverge. (On pourra utiliser le principe de comparaison et la partie préliminaire). Dans toute la suite on prend donc $p \geq 2$.
(5) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n + p + 2)\, u_{n+2} = (n + 2)\, u_{n+1}.$$

(6) En déduire par récurrence sur n que

$$S_n = \frac{1}{p-1} \left(1 - (n + p + 1)\, u_{n+1}\right)$$

(7) On pose $v_n = (n + p)u_n$. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
(8) En déduire que la suite (v_n) converge et que sa limite ℓ est positive ou nulle.
(9) Utiliser le résultat pprécédent pour montrer que (S_n) converge et donner sa limite en fonction de p et de ℓ.
(10) On suppose dans cette question que $\ell \neq 0$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ell}{n u_n} = 1, .$$

et l'existence d'un $N_0 \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $n \geq N_0$,

$$u_n \geq \frac{\ell}{2n}.$$

En déduire, en utilisant le principe de comparaison et la partie préliminaire, une contradiction à propos de la convergence de (S_n).
(11) Donner la valeur de ℓ et en déduire en fonction de p, la somme de la série de terme général u_n.