# ECRICOME 2020

## Exercice 1

Dans cet exercice, on désigne par $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note $I_3$ la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit $a$ un réel ; on pose $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

### Partie A : Étude du cas où $a = 1$

Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$.

***1.*** Expliciter la matrice $M$, puis calculer $(M - I_3)^2$.

***2.*** En déduire l'unique valeur propre possible de $M$.

***3.*** La matrice $M$ est-elle inversible ? La matrice $M$ est-elle diagonalisable ?

### Partie B : Étude du cas où $a = 0$

Dans cette partie, on suppose que $a = 0$.

***4.*** Démontrer que 1 est une valeur propre de $M$, et donner une base et la dimension du sous-espace propre associé.

***5.*** Démontrer que $M$ n'est pas inversible.

***6.*** En utilisant les deux questions précédentes, déterminer l'ensemble des valeurs propres de $M$, et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice $M$ est-elle diagonalisable ?

### Partie C : Étude du cas où $a$ est différent de 0 et de 1

Dans cette partie, on suppose que $a$ est différent de 0 et de 1.
On pose $E = \mathbb{R}^3$, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $E$.
Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice $M$.
Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$.

***7.*** Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de $E$.

***8.*** Calculer $f(u)$, $f(v)$.

***9.*** Calculer $f(w)$ et trouver deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que $f(w) = \alpha v + \beta w$.

***10.*** Déterminer la matrice représentative de $f$ dans la base $\mathscr{B}'$, que l'on notera $T$.

***11.*** En déduire l'ensemble des valeurs propres de $M$, et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice $M$ est-elle diagonalisable ?

# Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction $f_n$ sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt$$

## Partie A : Étude de la fonction $f_n$

Dans cette partie, on fixe un entier naturel $n$ non nul.

*1.* Démontrer que la fonction $f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \geqslant 0,\ f_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}$$

*2.* Étudier les variations de $f_n$.

*3.* Démontrer que $f_n$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa dérivée seconde.
En déduire que $f_n$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

*4.* ***a)*** Démontrer : $\forall t \geqslant 1,\ t^{2n}-1 \ \geqslant\ n\,(t^2-1)$.

***b)*** Montrer alors : $\forall x \geqslant 1,\ f_n(x) \ \geqslant\ f_n(1) + \dfrac{n}{2}\,(x-1)^2$.

***c)*** En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

*5.* Calculer $f_n(0)$, puis démontrer : $f_n(1) < 0$.

*6.* Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.
On note $x_n$ cette solution.

## Partie B : Étude d'une suite implicite

On étudie dans cette partie le comportement de la suite $(x_n)$, où pour tout entier naturel $n$ non nul, $x_n$ est l'unique solution strictement positive de l'équation : $f_n(x) = 0$.
On admettra :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \geqslant \frac{2n+2}{2n+1}$$

*7.* Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) \ = \ x^{2n+1}\ \left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

*8.* ***a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1},\ f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$.

***b)*** En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x_n) \geqslant 0$.

***c)*** Montrer alors que la suite $(x_n)$ est décroissante, puis qu'elle est convergente.

*9.* ***a)*** Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ : $-\ln(2) \leqslant f_n(1) \leqslant 0$.

***b)*** À l'aide de l'inégalité démontrée à la question ***4.b)*** de la partie ***A***, montrer alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant x_n - 1 \leqslant \sqrt{\frac{2\,\ln(2)}{n}}$$

Quelle est la limite de $x_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?

### Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on fixe à nouveau un entier naturel $n$ non nul.
L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction $G_n$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$G_n : (x, y) \mapsto f_n(x) \times f_n(y)$$

***10.*** Justifier que la fonction $G_n$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et calculer ses dérivées partielles premières.

***11.*** Déterminer l'ensemble des points critiques de $G_n$.

***12.*** Calculer la matrice hessienne de $G_n$ au point $(x_n, x_n)$ puis au point $(1, 1)$.

***13.*** La fonction $G_n$ admet-elle un extremum local en $(x_n, x_n)$ ? Si oui, donner la nature de cet extremum.

***14.*** La fonction $G_n$ admet-elle un extremum local en $(1, 1)$ ? Si oui, donner la nature de cet extremum.

## Exercice 3

Soit $a$ un réel strictement positif.

***1.*** Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, on pose :

$$I_n(a) \ = \ \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n} \, dt$$

Montrer que l'intégrale $I_n(a)$ donverge et vaut $\dfrac{1}{(n-1)\, a^{n-1}}$.

***2.*** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \dfrac{3\, a^3}{t^4} & \text{si } t \geqslant a \end{cases}$$

***a)*** Démontrer que $f$ est bien une densité de probabilté. Soit $X$ une variable aléatoire admettant $f$ pour densité.

***b)*** Donner la fonction de répartition de $X$.

***c)*** Démontrer que $X$ admet une espérance et calculer cette espérance.

***d)*** Démontrer que $X$ admet une variance et que celle-ci vaut $\dfrac{3\, a^2}{4}$.

***3.*** Soit $U$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1]$. On pose : $Y = \dfrac{a}{U^{\frac{1}{3}}}$.

***a)*** Déterminer $Y(\Omega)$.

***b)*** Déterminer la fonction de répartition de $Y$ et vérifier que $Y$ et $X$ suivent la même loi.

***c)*** Écrire une fonction en langage **Scilab** d'en-tête : `function Y = simulX(a, m, n)` prenant en argument un réel $a$ strictement positif et deux entiers naturels $m$ et $n$ non nuls, qui renvoie une matrice à $m$ lignes et $n$ colonnes dont chaque coefficient est un réel choisi de façon aléatoire en suivant la loi de $X$. Ces réels seront choisis de façon indépendante.
À cet effet, on rappelle que si $m$ et $n$ sont des entiers naturels non nuls, l'instruction : `rand(m, n)` renvoie une matrice à $m$ lignes et $n$ colonnes dont chaque coefficient suit la loi uniforme sur $]0, 1]$, ces coefficients étant choisis de façon indépendantes.

***4.*** ***a)*** Calculer $\mathbb{P}(\,[X > 2a]\,)$.

***b)*** Calculer $\mathbb{P}_{[X>2a]}(\,[X > 6a]\,)$.

***c)*** On suppose que la fonction **Scilab** de la question ***3.a)*** a été programmée correctement. Compléter le script ci-dessous afin qu'il renvoie une valeur permettant de vérifier le résultat de la question précédente.

```
a = 10
N = 100000
s1 = 0
s2 = 0
X = simulX(a, 1, N)
for k = 1:N
    if ............. then
        s1 = s1 + 1
        if X(k) > 6 * a then
            .............
        end
    end
end
if s1 > 0 then
    disp(.............)
end
```

On cherche dans la suite de l'exercice à estimer le paramètre $a$.
Soit $n$ un entier naturel non nul, et $X_1$, …, $X_n$ $n$ variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi que $X$.

***5.*** On pose : $V_n = \dfrac{2}{3n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

***a)*** Montrer que $V_n$ est un estimateur sans biais pour le paramètre $a$.

***b)*** Calculer son risque quadratique et vérifier que celui-ci vaut $\dfrac{a^2}{3n}$.

***6.*** On pose : $W_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

***a)*** Déterminer la fonction de répartition de $W_n$ et vérifier que $W_n$ est bien une variable aléatoire à densité.

***b)*** Montrer que $W_n$ admet pour densité la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \dfrac{3na^{3a}}{t^{3n+1}} & \text{si } t \geqslant a \end{cases}$$

***c)*** Démontrer que $W_n$ admet une espérance et calculer cette espérance.
Déterminer alors l'unique réel $\lambda_n$ dépendant de $n$ tel que $\lambda_n\, W_n$ est un estimateur sans biais pour le paramètre $a$.

***d)*** Calculer le risque quadratique de $\lambda_n\, W_n$ et vérifier que celui-ci vaut $\dfrac{a^2}{3n\,(3n-2)}$.

*7.* On rappelle que :

- si `A` est une matrice **Scilab**, l'instruction : `A(i, :)` renvoie la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice `A`.
- si `A` est une matrice **Scilab** (éventuellement une matrice ligne), l'instruction : `sum(A)` renvoie la somme des coefficients de la matrice `A`.
- si `X` est une matrice ligne, l'instruction : `plot2d(X, style = -1)` représente graphiquement les coefficients de `X` à l'aide de croix droites.
- si `X` est une matrice ligne, l'instruction : `plot2d(X, style = -2)` représente graphiquement les coefficients de `X` à l'aide de croix obliques.

*a)* Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle réalise $m$ simulations de la variable aléatoire $V_n$ et renvoie les résultats obtenus sous forme d'une matrice ligne à $m$ éléments :

```
function V = simulV(a, m, n)
    X = simulX(a, m, n)
    V = zeros(1, m)
    for k = ...........
        V(k) = ...........
    end
endfunction
```

Pour la suite, on prend $n = 100$ et on suppose que l'on dispose d'une fonction similaire `simulW` permettant d'obtenir $m$ simulations de la variable aléatoire $\lambda_n W_n$.

*b)* Compléter les lignes ci-dessous pour écrire le script qui a permis d'obtenir le graphique présenté :

```
W = simulW(..., ..., ...)
V = simulV(..., ..., ...)
plot2d(..., style = -1)
plot2d(..., style = -2)
```

On justifiera la réponse pour les deux dernière lignes.