Écricome 2020

Voie E
Une solution

Exercice 1

Dans cet exercice, on désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit a un réel; on pose $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie A : Étude du cas où $a = 1$

Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$.

(1) Pour $a = 1$, on obtient

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (M-I)^2 = 0.$$

(2) De la relation $(M - I_3)^2 = 0$, on déduit que $(X-1)^2$ est un polynôme annulateur de M. Par conséquent, les valeurs propres de M sont incluses dans l'ensemble des racines de ce polynôme qui ne s'annule qu'en 1. Ainsi, la seule valeur propre possible pour M est 1,

$$\mathrm{Sp}(M) \subset \{1\}.$$

(3) Il est clair que 0 n'est pas valeur propre de M, ainsi M est inversible. De plus, on observe facilement que $\mathrm{rg}(M - I_3) = 1$ (il y a une colonne nulle et deux colonnes clairement liées). Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(M - I_3)) = 2$. En particulier, 1 est bien valeur propre (et 1 est donc la seule valeur propre de M). En revanche, cette dimension n'étant pas égale à 3, la matrice M n'est pas diagonalisable.

Partie B : Étude du cas où $a = 0$

Dans cette partie, on suppose que $a = 0$.

(4) Pour $a = 0$, la matrice M est alors la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour répondre à la question posée, on détermine $\mathrm{Ker}(M - I_3)$:

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M - I_3) &\iff MX = X \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y - z &=& x \\ x - z &=& y \\ x - y &=& z \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x - y - z &=& 0 \\ x - y - z &=& 0 \\ x - y - z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \{x = y + z \\ &\iff X = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on obtient $\mathrm{Ker}(M - I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

En particulier, 1 est bien valeur propre de M et le sous-espace associé a pour base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ (la famille est génératrice et clairement libre; les deux vecteurs ne sont pas colinéaires) et est donc de dimension 2.

(5) On montre que $\mathrm{Ker}(M) \neq \{0\}$, ce qui suffit à garantir la non inversibilité de M (et dans ce cas, 0 est valeur propre de M).

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M) &\iff MX = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y - z &=& 0 \\ x - z &=& 0 \\ x - y &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \{x = y = z \\ &\iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

M n'est pas inversible, 0 est valeur propre et le sous-espace propre associé est de dimension 1.

(6) D'après les deux questions précédentes, on sait que $\{0,1\} \subset \mathrm{Sp}(M)$ et que $\dim(E_0)+\dim(E_1) = 1+2 = 3$. Or la somme des dimensions des sous-espaces propres de M ne peut dépasser 3 et on est assuré d'avoir toutes les valeurs propres. Comme le total des dimensions est 3, on peut conclure que M est diagonalisable.

Partie C : Étude du cas où a est différent de 0 et de 1

Dans cette partie, on suppose que a est différent de 0 et de 1.
On pose $E = \mathbb{R}^3$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est M.
Soit $u = (1,1,1)$, $v = (1,0,1)$ et $w = (1,1,0)$.

(7) La famille (u,v,w) étant composée de trois vecteurs de E qui est de dimension 3, il suffit de montrer qu'elle est libre pour pouvoir conclure qu'elle en forme une base. Soient $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v + \gamma w = 0 &\iff \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma &= 0 \\ \alpha+\gamma &= 0 \\ \alpha+\beta &= 0 \end{cases} \\ &\iff \alpha=\beta=\gamma=0 \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{B}'$ est bien libre et forme une base de E.

(8) Le calcul donne

$$M\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix}, \quad M\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

ce qui permet de voir que $f(u) = au$ et $f(v) = v$. (En particulier, les vecteurs u et v étant non nuls, a et 1 sont valeurs propres de f).

(9) On calcule et résout

$$M\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+1\\1\\a\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

et donc $f(w) = av + w$ (ou encore $\alpha = a$ et $\beta = 1$).

(10) Par définition de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ et ayant obtenu $f(u) = au$, $f(v) = v$, $f(w) = av + w$, on peut écrire

$$T = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(11) La matrice T étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi,

$$\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(T) = \{a, 1\}.$$

On observe alors que $\mathrm{rg}(T - I_3) = 2$ (car $a-1 \neq 0$ et $a \neq 0$) donc $\dim(E_1) = \dim(\mathrm{Ker}(T - I_3) = 1$. De même, $\mathrm{rg}(T - aI_3) = 2$ et donc $\dim(E_a) = 1$. La somme des dimensions des sous-espaces propres n'étant pas égale à 3, M n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geq 0,\ f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t.$$

Partie A : Étude de la fonction f_n

Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

(1) La fonction $g_n :\ t \mapsto \dfrac{t^{2n}-1}{t+1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi, d'après le cours d'Analyse (et un résultat qui s'appelle *théorème fondamental de l'analyse*), f_n est la primitive de g_n qui s'annule en 0.
À ce titre, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \geq 0$, on a

$$f_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}.$$

(2) Le signe de $f_n'(x)$ est donné par celui de son numérateur. Or,

$$x^{2n} - 1 \geq 0 \iff x^{2n} \geq 1 \iff \ln(x) \geq 0 \iff x \geq 1.$$

On peut alors dresser le tableau de variations de f_n.

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$	0	$-$	0	$+$	
f_n	0	$\searrow$	$f_n(1)$	$\nearrow$	

(3) f_n' est quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$ donc f_n' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et f_n est alors de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x \geq 0$, on a

$$f_n''(x) = \frac{2nx^{2n-1}(x+1) - (x^{2n}-1)}{(x+1)^2} = \frac{(2n-1)x^{2n} + 2nx^{2n-1} + 1}{(x+1)^2}.$$

Il est clair que, pour tout $x \geq 0$, $f_n''(x) \geq 0$ (le numerateur est somme de multiplies positifs de puissances de x; le dénominateur est un carré). Ainsi, f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

(4) (a) On peut montrer ce résultat de plusieurs manières; on choisit ici une preuve relativement élégante. Si $x > 1$, observons que

$$\frac{x^n - 1}{x-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \geq \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

ce qui donne $x^n - 1 \geq n(x-1)$ pour tout $x > 1$. Cette inégalité s'étend naturellement à $x = 1$ (les deux membres sont nuls). En l'appliquant à $x = t^2$ (si $t \geq 1$, on a bien $t^2 \geq 1$), on a l'inégalité voulue.

(b) Comme $t^2-1=(t-1)(t+1)$, on a, pour tout $t\geq 1$,

$$\frac{t^{2n}-1}{t+1}\geq n(t-1)$$

Soit $x\geq 1$. Par positivité de l'intégrale et par la relation de Chasles

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t+\int_1^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t \\ &\geq f_n(1)+n\int_1^x (t-1)\mathrm{d}t \\ &= f_n(1)+n\left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_1^x \\ &= f_n(1)+n\frac{(x-1)^2}{2}, \end{aligned}$$

ce qui est bien l'inégalité demandée.

(c) Lorsque $x\to+\infty$, le membre de droite de l'inégalité précédente tend vers ∞. Par théorème de comparaison, on peut conclure que

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty.$$

(5) Comme $f_n(0)=0$ et que f_n est strictement décroissante sur $[0;1]$, il suit que $f_n(1)<f_n(0)=0$.

(6) Chercher les solutions de l'équation $f_n(x)=0$ revient à chercher les antécédents de 0 par f_n. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$. Elle est strictement décroissante sur $]0;1]$ et y réalise donc une bijection (par le théorème du même nom) vers $[f_n(1);0[$. Cet intervalle ne contient pas 0 qui n'admet donc aucun antécédent par f_n sur $]0;1]$.
D'autre part, f_n est strictement croissante sur $]1;+\infty[$ et réalise donc une bijection de $]1;+\infty[$ vers $]f_n(1);+\infty[$, qui cette-fois contient 0. Ainsi, 0 admet un unique antécédent par f_n sur $\mathbb{R}_+$ et cet antécédent est strictement supérieur à 1. On le note x_n:

$$f_n(x)=0\iff x=x_n.$$

Partie B : Étude d'une suite implicite

On admettra que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ x_n\geq\frac{2n+2}{2n+1}.$$

(7) Soient $x\geq 0$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x)-f_n(x) &= \int_0^x \frac{t^{2n+2}-1}{t+1}\mathrm{d}t-\int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{t^{2n+2}-t^{2n}}{t+1}\mathrm{d}t \qquad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^x \frac{t^{2n}(t^2-1)}{t+1}\mathrm{d}t=\int_0^x t^{2n}(t-1)\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{2n+2}}{2n+2}-\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x=\frac{x^{2n+2}}{2n+2}-\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= x^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+2}-\frac{1}{2n+1}\right), \end{aligned}$$

ce qui est bien l'égalité demandée.

(8) (a) Soit $x \geq \frac{2n+2}{2n+1}$, d'après l'inégalité précédente

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right) \geq x^{2n+1}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = x^{2n+1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \geq 0$$

donc $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.

(b) On applique le résultat précédent à $x = x_n$ (ce qui est licite par l"hypothèse admise en début de partie). Ainsi,

$$f_{n+1}(x_n) \geq f_n(x_n) = 0.$$

(c) Comme f_{n+1} est bijective et strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et que x_n et x_{n+1} en sont éléments, on a

$$f_{n+1}(x_n) \geq 0 = f_{n+1}(x_{n+1}) \Longrightarrow x_n \geq x_{n+1}$$

et la suite (x_n) est décroissante. Celle-ci étant également minorée par 1, le théorème de convergence monotone assure qu'elle converge, vers une certaine limite (que l'on peut noter ℓ) vérifiant $\ell \geq 1$.

(9) (a) On sait déjà que $f_n(1) \leq 0$. Montrons que $f_n(1) \geq -\ln(2)$. Pour tout $t \in [0;1]$, on a $t^{2n} - 1 \geq -1$. Il suit (comme $t+1 \geq 0$) que

$$\frac{t^{2n}-1}{t+1} \geq \frac{-1}{t+1}$$

puis, par positivité de l'intégrale,

$$f_n(1) = \int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t \geq \int_0^1 \frac{(-1)}{t+1}\mathrm{d}t = -[\ln(1+t)]_0^1 = -\ln(2),$$

ce qui donne bien ce qu'on voulait.

(b) On applique l'inégalité obtenue en 4b à $x = x_n$. D'après la question précédente, $0 \leq -f_n(1) \leq \ln(2)$ et on obtient

$$(x_n - 1)^2 = \frac{2}{n}\left(f_n(x_n) - f_n(1)\right) = -\frac{2}{n}f_n(1) \leq \frac{2\ln(2)}{n}.$$

Comme on sait que $x_n \geq 1$ (et donc $x_n - 1 \geq 0$) ceci donne bien, en prenant la racine qui est une fonction croissante

$$0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2\ln(2)}{n}}.$$

Le membre de droite tend clairement vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Par le théorème des gendarmes, on a $x_n - 1 \to 0$, $n \to +\infty$, ce qui permet de conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 1.$$

Partie 3 : Étude d'une fonction de deux variables

On étudie la fonction G_n définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad G_n(x,y) = f_n(x) \times f_n(y).$$

(10) Les fonctions $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (car polynomiales) et donc sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, par composition avec la fonction f_n de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, les fonctions $(x,y) \mapsto f_n(x)$ et $(x,y) \mapsto f_n(y)$ sont aussi $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et par produit c'est encore

le cas de G_n.
On a alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}
\partial_1 G_n(x,y) &= f_n(y) \times f_n'(x) = \left(\int_0^y \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t\right)\frac{x^{2n}-1}{x+1} \\
\partial_2 G_n(x,y) &= f_n(x) \times f_n'(y) = \left(\int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t\right)\frac{y^{2n}-1}{y+1}
\end{aligned}$$

(11) On résout

$$\begin{aligned}
(x,y)\text{point critique de } G_n &\iff \left\{\begin{array}{lcl} \partial_1 G_n(x,y) &=& 0 \\ \partial_2 G_n(x,y) &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{lcl} f_n(x)f_n'(y) &=& 0 \\ f_n(y)f_n'(x) &=& 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Or, sur $\mathbb{R}_+^*$, f_n ne s'annule qu'en x_n et f_n' ne s'annule qu'en 1. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{lcl} f_n(x)f_n'(y) &=& 0 \\ f_n(y)f_n'(x) &=& 0 \end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{lcl} f_n(x) &=& 0 \\ f_n(y) &=& 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{lcl} f_n'(y) &=& 0 \\ f_n'(x) &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& x_n \\ y &=& x_n \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1 \\ y &=& 1 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi, G_n admet deux points critiques: (x_n, x_n) et $(1,1)$.

(12) On commence par calculer les dérivées partielles d'ordre 2.

$$\begin{aligned}
\partial_{1,1}^2 G_n(x,y) &= f_n(y)f_n''(x) \\
\partial_{1,2}^2 G_n(x,y) &= \partial_{2,1}^2 G_n(x,y) \\
&= f_n'(x)f_n'(y) \\
&= \frac{x^{2n}-1}{x+1} \times \frac{y^{2n}-1}{y+1} \\
\partial_{2,2}^2 G_n(x,y) &= f_n(x)f_n''(y)
\end{aligned}$$

On forme alors les matrices hessiennes (on rappelle que $f_n(x_n) = 0$ et que $f_n'(1) = 0$). De plus, observant que

$$f_n'(x_n)^2 = \left(\frac{x_n^{2n}-1}{x_n+1}\right)^2,$$

et

$$f_n''(1) = n$$

on peut écrire

$$H(x_n, x_n) = \left(\frac{x_n^{2n}-1}{x_n+1}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

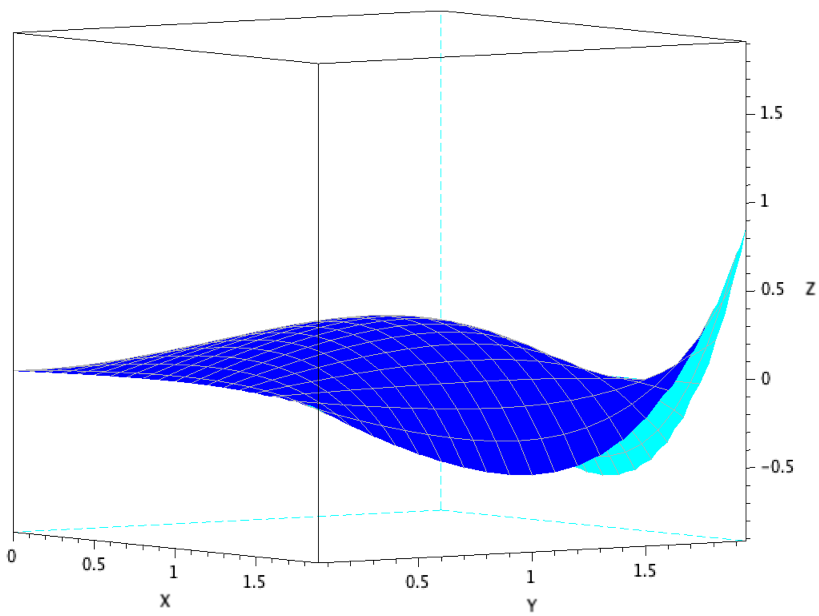
et

$$H(1,1) = nf_n(1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(13) Les valeurs propres de $H(x_n, x_n)$ sont de même signe que celle de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dont le spectre est $\mathrm{Sp}(M) = \{1, -1\}$ (qu'on obtient en résolvant $\lambda^2 - 1 = 0$ correspondant au fait que $M - \lambda I_2$ ne soit pas inversible). Les deux valeurs propres sont de signes opposés; G_n présente un point selle en (x_n, x_n).

(14) En $(1,1)$, la hessienne est déjà diagonale, ses valeurs propres (qui sont ses coefficients diagonaux) sont strictement négatives (car $nf_n(1) < 0$ car $f_n(1) < 0$). Ainsi, G_n présente un maximum local en $(1,1)$ (ce maximum vaut $G_n(1,1) = f_n(1)^2$).

On ne résiste pas, pour le plaisir des yeux, à l'envie de joindre une représentation de la surface $z = G_n(x,y)$ pour $n = 2$ sur $]0;2]\times]0;2]$ obtenue avec `SciLab`.



Exercice 3

Soit a un réel strictement négatif.

(1) L'intégrale $I_n(a)$ est impropre en $+\infty$. Soit $X > a$. On a

$$\begin{aligned} \int_a^X \frac{1}{t^n}\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{(n-1)t^{n-1}}\right]_a^X \\ &= \frac{1}{(n-1)a^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)X^{n-1}} \\ &\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(n-1)a^{n-1}}, \end{aligned}$$

car $n - 1 > 0$ (car $n \geq 2$). Ainsi, l'intégrale $I_n(a)$ converge et $I_n(a) = \dfrac{1}{(n-1)a^{n-1}}$.

(Remarque. On pouvait justifier la convergence en reconnaissant une intégrale de Riemann...)

(2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < a \\ \dfrac{3a^2}{t^4}, & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

(a) On montre que f est bien une densité de probabilité.

- f est continue partout sauf en a.
  En effet, sur $]-\infty; a[$, f est constante (nulle) donc continue. Sur $]a; +\infty[$, f est inverse d'une fonction polynomiale qui ne s'annule pas.

- f est positive ou nulle partout sur $\mathbb{R}$.
  Comme $a > 0$, $3a^3/t^4 > 0$ sur $[a; +\infty[$ et f est nulle ailleurs.

- L'intégrale sur $]-\infty; +\infty[$ de f converge et vaut 1.
  Comme f est nulle sur $]-\infty; a[$, on se ramène à la convergence de l'intégrale sur $[a; +\infty[$. On reconnait un multiple de l'intégrale $I_n(a)$ avec $n = 4$. Donc l'intégrale converge et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{a}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 3a^3 I_4(a) = 1.$$

  Ainsi, f est bien une densité de probabilité. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

(b) La fonction de répartition F_X de X est donnée par

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Comme f est nulle sur $]-\infty; a[$, il est clair que $F_X(x) = 0$ pour $x < a$. Si $x \geq a$, un calcul similaire à celui fait à la question 1 donne $F_X(x)$. Au final, on peut écrire

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ 1 - \dfrac{a^3}{x^3}, & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

(c) Par définition,

$$\begin{aligned} X \text{ admet une espérance} \quad &\Longleftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\mathrm{d}t \text{ converge absolument} \\ &\Longleftrightarrow \quad \int_{a}^{+\infty} \frac{3a^3}{t^3}\mathrm{d}t \text{ converge.} \end{aligned}$$

On reconnait un multiple de l'intégrale $I_3(a)$ qui converge. Donc X admet une espérance et

$$E(X) = 3a^3 I_3(a) = \frac{3a}{2}.$$

(d) Par König-Huyguens,

$$\begin{aligned} X \text{ admet une variance} \quad &\Longleftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t \text{ converge absolument} \\ &\Longleftrightarrow \quad \int_{a}^{+\infty} \frac{3a^3}{t^2}\mathrm{d}t \text{ converge.} \end{aligned}$$

On reconnait un multiple de l'intégrale $I_2(a)$ qui converge. Donc X admet (un moment d'ordre 2 et donc) une variance et

$$E(X^2) = 3a^3 I_2(a) = 3a^2.$$

On obtient alors

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3a^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4},$$

ce qu'on voulait.

(3) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0;1])$. On pose $Y = \dfrac{a}{U^{1/3}}$.

(a) Comme la fonction $t \mapsto at^{-1/3}$ réalise une bijection (elle est continue et strictement décroissante) de $]0;1]$ sur $[a;+\infty[$ et que $U(\Omega) =]0;1]$ d'après l'énoncé, on peut conclure que $Y(\Omega) = [a;+\infty[$.

(b) D'après la question précédente, $F_Y(x) = 0$ si $x < a$. Soit donc $x \geq a$. On a

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P\left(a\exp\left(-\frac{1}{3}\ln(U)\right) \leq x\right) \\ &= P\left(U \geq \exp\left(-3\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right)\right) \\ &= 1 - F_U\left(\exp\left(-3\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right)\right) = 1 - F_U\left(\frac{a^3}{x^3}\right) \end{aligned}$$

Or, si $x \geq a$, $a^3/x^3 \in]0;1]$ et donc $F_U(a^3/x^3) = a^3/x^3$. Au final, on obtient, pour $x \geq a$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ 1 - \frac{a^3}{x^3}, & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

ou encore $F_Y(x) = F_X(x)$, et on peut conclure que X et Y suivent la même loi.

(c) On va simuler la loi de X en simulant Y via *inversion* avec la formule précédente, à partir de la loi uniforme avec une opération pointée.

```
function Y=simulX(a,m,n)
U=rand(m,n)
Y=a*U.^(-1/3)
endfunction
```

(4) (a) On utilise la fonction de répartition

$$P(X > 2a) = 1 - F_X(2a) = 1 - \left(1 - \frac{a^3}{(2a)^3}\right) = \frac{1}{8}.$$

(b) La définition de probabilité conditionnelle donne

$$P_{[X>2a]}(X > 6a) = \frac{P([X > 6a] \cap [X > 2a])}{P(X > 2a)} = \frac{P(X > 6a)}{P(X > 2a)} = \frac{1 - (1 - a^3/(6a)^3)}{1/8} = \frac{8}{6^3} = \frac{1}{27}.$$

(c) L'idée est alors simuler un assez grand échantillon de X (ici $N = 10000$) et de compter (avec la variable `s1`) le nombre des réalisations de X pour lesquelles le résultat est strictement plus grand que $2a$. Parmi ces réalisations, on compte (avec la variable `s2`) celles qui sont strictement supérieures à $6a$). Le quotient des fréquences, qui est aussi égal au quotient `s2/s1` donne une estimation de la probabilité conditionnelle cherchée (seulement si `s1` > 0 sinon on diviserait par 0 mais dans ce cas la probabilité conditionnelle n'a pas de sens).

```
a=10
N=10000 //taille de l'échantillon
s1=0
s2=0
X=simulX(a,1,N) // échantillon de X de taille N
        for k=1:N
```

```
        if X(k) > 2*a then
                s1=s1+1 // on compte le nombre de réalisations de X qui
sont > 2a
                if X(k) >6*a  then
                        s2=s2+1
                end
        end
end
if s1>0 then
        disp(s2/s1)
end
```

(5) Soit n un entier naturel non nul et $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un échantillon de X.

On pose $V_n = \dfrac{2}{3n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

(a) La variable aléatoire V_n est une fonction de l'échantillon dont la loi dépend de a; c'est donc un estimateur de a. Pour montrer qu'il est sans biais, on calcule son espérance. Par linéarité de celle ci, et comme les X_k ont toutes pour espérance $E(X) = 3a/2$, on a

$$E(V_n) = \frac{2}{3n} E(X_1 + ... + X_n) = \frac{2}{3n} \times n \times \frac{3a}{2} = a$$

et V_n est bien un estimateur sans biais de a.

(b) Comme V_n est sans biais, son risque quadratique est égal à sa variance.

$$\begin{aligned}
r(V_n) &= V(V_n) = V\left(\frac{2}{3n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \\
&= \frac{4}{9n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \\
&= \frac{4}{9n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) \qquad \text{(par indépendance des } X_k\text{)} \\
&= \frac{4}{9n^2} \times n \times V(X) = \frac{4}{9n}\frac{3a^2}{4} \\
&= \frac{a^2}{3n}.
\end{aligned}$$

(6) On pose $W_n = \min(X_1, ..., X_n)$.

(a) Cette question est très classique.

$$\begin{aligned}
F_{W_n}(x) &= P(W_n \leq x) = 1 - P(\min(X_1, ..., X_n) > x) \\
&= 1 - P([X_1 > x] \cap [X_2 > x] \cap ... \cap [X_n > x]) \\
&= 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x)...P(X_n > x) \qquad \text{(par indépendance des } X_k\text{)} \\
&= 1 - (1 - F_X(x))^n
\end{aligned}$$

et on peut écrire

$$F_{W_n}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ 1 - \dfrac{a^{3n}}{x^{3n}}, & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

La fonction de répartition de W_n est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier au point de raccordement a et est de classe $\mathcal{C}^1$ partout sauf en a (les *morceaux* sont des combinaisons d'inverses de fonctions polynomiales qui ne s'annulent pas), W_n est bien une variable aléatoire à densité.

(b) Une densité de W_n est obtenue en dérivant F_{W_n} en dehors de a (et en prenant en $t = a$ une valeur arbitraire). En particulier,

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ \dfrac{3na^{3n}}{x^{3n+1}}, & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

(c) Tout cela devient très long si on n'utilise pas les intégrales $I_n(a)$...
Par définition,

$$\begin{aligned} W_n \text{ admet une espérance} \quad &\iff \quad \int_{-\infty}^{+\infty} tf_n(t)\mathrm{d}t \text{ converge absolument} \\ &\iff \quad 3na^{3n} \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^{3n}}\mathrm{d}t \text{ converge.} \end{aligned}$$

On reconnait un multiple de l'intégrale $I_{3n}(a)$ qui converge. Donc W_n admet une espérance et

$$E(W_n) = 3na^{3n} I_{3n}(a) = \frac{3na^{3n}}{(3n-1)a^{3n-1}} = \frac{3n}{3n-1}a.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$E\left(\frac{3n-1}{3n}W_n\right) = a,$$

il suffit donc de prendre $\lambda_n = \dfrac{3n-1}{3n}$ pour obtenir un estimateur sans biais de a.

(d) Le risque quadratique de ce nouvel estimateur est égal à sa variance. Pour calculer tout cela, on a besoin de la variance de W_n et donc de son moment d'ordre 2. On se remonte les manches (si ce n'était pas déjà le cas) et on y va.
Par König-Huyguens,

$$\begin{aligned} W_n \text{ admet une variance} \quad &\iff \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t)\mathrm{d}t \text{ converge absolument} \\ &\iff \quad 3na^{3n} \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^{3n-1}}\mathrm{d}t \text{ converge.} \end{aligned}$$

On reconnait un multiple de l'intégrale $I_{3n-1}(a)$ qui converge. Donc W_n admet (un moment d'ordre 2 et donc) une variance et

$$E(W_n^2) = 3na^{3n} I_{3n-1}(a) = \frac{3n}{3n-2}a^2$$

On obtient alors

$$V(W_n) = E(W_n^2) - E(W_n)^2 = \left(\frac{3n}{3n-2} - \frac{(3n)^2}{(3n-1)^2}\right)a^2 = \frac{3n}{(3n-1)^2(3n-2)}a^2$$

et enfin

$$r(\lambda_n W_n) = \lambda_n^2 V(W_n) = \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^2 \frac{3n}{(3n-1)^2(3n-2)}a^2 = \frac{a^2}{3n(3n-2)}$$

ce qui fait quand même plaisir car c'est bien ce qu'on demande.

(7) (a) On complète sans difficulté. Chacune des m lignes de `X` est un $n-$échantillon de X.

```
function V=simulV(a,m,n)
        X=simulX(a,m,n)
        V=zeros(1,m)
        for k=1:m
            V(k)=2/(3*n)*sum(X(k, :))
        end
endfunction
```

(b) Parmi les deux suites représentées, l'une semble être très proche de 5 et l'autre oscille autour de 5. Comme chacune de ces deux suites semblent représenter les réalisations des deux estimateurs V_n et $\lambda_n W_n$ de a, on peut comprendre qu'on a pris $a = 5$. On a 20 points de chaque donc $m = 20$. Les questions précédentes ont permis de voir, via le calcul du risque quadratique que $\lambda_n W_n$ était un meilleur estimateur de a; il "converge" vers a plus rapidement, ce qui nous permet de comprendre que la suite représentée avec des $+$ correspond aux termes de $(\lambda_n W_n)$ alors que la suite représentée avec des $\times$ est (V_n). On peut donc compléter le programme:

```
W=simulW(5,20, 100)
V=simulV(5,20, 100)
plot2d(W, style=-1) //-1 correspond à des +
plot2d(V, style=-2) //-2 correspond à des x
```

À titre de remarque, on joint aussi le programme que le sujet aurait pu demander d'écrire pour simuler W_n.

```
function W=simulW(a, m, n)
    X=simulX(a,m,n)
    W=(3*n-1)/(3*n)*min(X,'c')
endfunction
```