BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 298

Conception : EDHEC BS

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

Mardi 5 mai 2020, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On note ${}^tB$ la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire.

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1) Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f, qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, associe :

$$f(M) = ({}^tA)M + MA$$

2) a) Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.
   b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Tournez la page S.V.P.

3) On considère les trois matrices $J=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$ et $L=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$.

a) Montrer que la famille $\mathcal{B}=(J,K,L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

4) a) Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.

b) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$.

c) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ puis en donner une base.

5) a) Écrire la matrice F de f dans la base $\mathcal{B}$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1\,;0\}$.

b) En déduire les valeurs propres de f.

c) On note Id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de $f+Id$ et dire si f est ou n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, où σ est strictement positif.

On rappelle que la fonction f_X qui à tout réel x associe $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ est une densité de X et on note F_X la fonction de répartition de X, définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_X(-x)=1-F_X(x)$.

2) On pose $Y=|X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire.

a) Montrer que la fonction de répartition de Y est la fonction, notée F_Y, définie par :

$$F_Y(x)=\begin{cases}2F_X(x)-1 \text{ si } x\geq 0\\ 0 \text{ si } x<0\end{cases}$$

b) En déduire que Y est une variable à densité et donner une densité f_Y de Y.

c) Montrer que Y possède une espérance et que l'on a $E(Y)=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

3) On suppose, dans cette question seulement, que σ est inconnu et on se propose de l'estimer.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ composé de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, et ayant toutes la même loi que Y.

On note S_n la variable aléatoire définie par $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Y_k$.

a) Montrer que S_n est un estimateur de σ, donner la valeur de son biais, puis proposer un estimateur sans biais de σ, que l'on notera T_n, construit de façon affine à partir de S_n.

b) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 de X, puis déterminer $E(Y^2)$, $V(Y)$ et $V(S_n)$.

c) Déterminer le risque quadratique de T_n en tant qu'estimateur de σ. En déduire que T_n est un estimateur convergent de σ.

4) On rappelle qu'en Scilab, si i et j désignent deux entiers naturels non nuls, la commande `grand(i,j,'nor',m,s)` simule dans un tableau à i lignes et j colonnes, $i\times j$ variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi normale d'espérance m et de variance s^2.
Compléter le script Scilab suivant afin qu'il permette de simuler les variables aléatoires S_n et T_n pour des valeurs de n et σ entrées par l'utilisateur.

```
n=input('entrez la valeur de n :')
sigma=input('entrez la valeur de sigma :')
X=------ // simulations de X1,…,Xn
Y=------ // simulations de Y1,…,Yn
S=------
T=------
```

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0;1[$. On pose $q=1-p$.
On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p.
On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1) Dans le cas où $n=1$, reconnaître la loi de Y.

On revient au cas général.

2) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

3) Soit k un élément de $[\![1,n]\!]$. Reconnaître la loi de Y, conditionnellement à l'événement $(X=k)$, et en déduire, en distinguant les cas $0\le i\le k$ et $k<i$, la probabilité $P_{(X=k)}(Y=i)$.

4) On rappelle les commandes Scilab suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :
`grand(1,1,'uin',a,b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$.
`grand(1,1,'bin',n,p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p.
`grand(1,1,'geom',p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.
`grand(1,1,'poi',a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a.

Compléter le script Scilab suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y.

```
n=input('entrez la valeur de n :')
p=input('entrez la valeur de p :')
X=------
Y=------
```

5) a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[\![0,n]\!]$, puis montrer que :

$$P(Y=0)=\frac{q(1-q^n)}{n(1-q)}$$

b) Écrire, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, la probabilité $P(Y=i)$ sous forme d'une somme de $n-i+1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

Tournez la page S.V.P.

6) a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Montrer l'égalité : $i\binom{k}{i} = k\binom{k-1}{i-1}$.

b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$E(Y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k \sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i}\right)$$

c) En déduire que $E(Y) = \frac{(n+1)p}{2}$.

7) a) Établir que :

$$\forall n \geq 2,\ E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i}\right)$$

b) Montrer que l'on a :

$$\forall n \geq 2,\ E(Y(Y-1)) = \frac{(n^2-1)p^2}{3}$$

c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$.

d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $E(Y(Y-1))$ et $E(Y)$.

Problème

On convient que, pour tout réel x, on a $x^0 = 1$.

1) Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$$

2) Calculer I_0 et I_1.

3) a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n$.

b) En déduire I_2.

c) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable `b`) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('donnez une valeur pour n :')
a=1/2
b=log(2)-1/2
for k=2:n
    aux=a
    a=------
    b=------
end
disp(b)
```

4) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

5) Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}$.

6) a) Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n, $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n.

b) En déduire la valeur de J_1.

7) En utilisant les questions 5) et 6), compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('donnez une valeur pour n :')
J=log(2)
for k=1:n-1
J=------
end
I=------
disp(I)
```

8) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.

9) a) Utiliser les questions 4) et 5) pour déterminer la valeur de $\lim_{n \to +\infty} J_n$.

b) En déduire la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

c) Utiliser la question 5) pour déterminer un équivalent de J_n, du type $\frac{1}{\alpha n}$, avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

10) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln 2 - \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$.

a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$

b) Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n ?

11) On se propose, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, on admet le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ, alors la suite (x_n) converge vers ℓ.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $u_k = (k+1)u_{k+1} - k u_k + (-1)^k$.

b) En déduire l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^n\right)$$

c) Montrer alors que $\lim_{n \to +\infty} S_{2n} = \lim_{n \to +\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln 2$. Conclure.

12) Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer.

a) $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2$.   b) $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2$.   c) $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2$.