ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

T.P. n°1

Suites, fonctions et représentations graphiques.
Révisions - Septembre 2019

Exercice 1.

(1) Rappeler les DL à l'ordre 1 et 2 de $\ln(1+x)$ en 0.

(2) Que fait le programme suivant? Pourquoi y a-t-il des "prime" à la ligne (8)? Réécrire les lignes (7) et (8) en remplaçant `plot2d()` par `plot()`.

```
(1) function y=f(x)
(2)     y=log(x+1)
(3) endfunction

(4) function y=g(x)
(5)     y=x-x^2/2
(6) endfunction

(7) x=-1.01:.01:1 ; y=feval(x,f); z=feval(x,g);
(8) plot2d(x, [y',x',z'])
```

Exercice 2. (Extrait de **EML 2019**, Exercice 3) On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n}.$$

(1) Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction `SciLab` suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n.

```
function u = suite(n)
    u  = 1
    for k = ..............
        u = ..............
    end
endfunction
```

(2) Il est possible de montrer (mais on s'en dédouane dans ce TP) que (u_n) converge vers une limite ℓ et que, pour tout $p \geq 2$,

$$0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}.$$

Écrire alors une fonction `SciLab` qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

Exercice 3. (Suites à récurrence linéaire d'ordre 2). On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par
$$u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad \text{et} \quad u_{n+2} = \frac{7}{2}u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n.$$

(1) Compléter la fonction SciLab suivante afin qu'elle renvoie le terme général u_n en fonction de n

```
function res=U(n)
    Uold=.....
    Unew=.....
    for i=.......
        aux=.....
        Uold=.....
        Unew=.....
    end
    res=.....
endfunction
```

(2) Le graphique suivant représente les termes de la suite (z_n) définie par $z_n = u_n/3^n$, pour $0 \leq n \leq 50$.

(a) Par lecture graphique, déterminer un équivalent de u_n.
(b) Quelle est l'expression du terme général de (u_n)?

Exercice 4. On considère une suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et pour tout entier n,
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

(1) Écrire un programme en SciLab qui calcule et affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n au clavier.

☞ *Pour $n = 100$, on trouve $u_{100} = 14.284064$.*

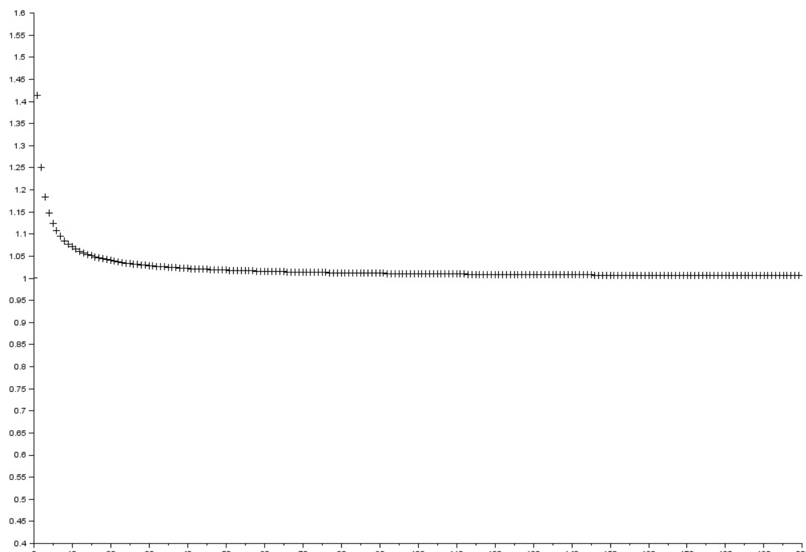
(2) Écrire une fonction en SciLab prenant comme paramètre un entier n et renvoyant la valeur de u_n.
(3) Écrire une fonction en SciLab prenant comme paramètre un entier n et renvoyant toutes les valeurs de u_0 à u_n rangées dans un vecteur.
(4) Écrire un programme en SciLab permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \geq 100$.

☞ *On trouve $n = 4998$.*

(5) On considère le programme SciLab suivant et la figure associée

```
u=1 ;
eq=[1]
for i=1:200
    u=(u+1/u) ;
    eq=[eq,u/sqrt(2*i)]
end

plot2d([0:200],eq,-1,rect=[0,0.4,200,1.6]);
```



(a) Que contient la variable `eq` en fin de boucle ?
(b) Conjecturer alors un équivalent de la suite (u_n) en $+\infty$ ainsi que la limite.
(c) Montrer que la suite (u_n) diverge effectivement vers $+\infty$.
On montrera que la suite est croissante et non majorée.

Exercice 5. (***Extrait de **ESSEC II 2016**) On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_n = u_{n-1}p_1 + u_{n-2}p_2 + ... + u_0 p_n.$$

Sous SciLab, soit P=$[p_1, ..., p_n]$ le vecteur ligne tel que P(j)=p_j (pour $j \in [\![1;n]\!]$). Écrire un programme qui calcule u_n à partir de P. *On propose deux méthodes.*

Méthode 1: à compléter

```
U=zeros(1, n+1)
U(1)=1
for k=1:n
    for j=1:k
        U(k+1)=...............
    end
end
disp(.................)
```

Méthode 2: à comprendre

```
U=zeros(1, n+1)
U(1)=1
for k=1:n
    U(k+1)=U(1:k)*P(k:-1:1)'
end
disp(U(n+1))
```

Exercice 6. On considère la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{1}{4^k + \ln(k+1) + 1}$.

(1) Donner un équivalent du terme général de la série.
(2) Justifier que cette série converge. On note S sa somme.
(3) On souhaite déterminer une valeur approchée de S.
  (a) Montrer que :
$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k + \ln(k) + 1} - S \right| \leq \frac{1}{3 \times 4^n}.$$
  (b) Écrire une fonction `SciLab`, d'entête `y=S_approx(eps)` prenant en paramètre un réel `eps` et renvoyant une valeur approchée de S à `eps` près.

Exercice 7. (Extrait **ORAL ESM**, non daté) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction
$$f_n : \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - 2x^3 + \frac{2}{n}x(x-1) \end{array}$$

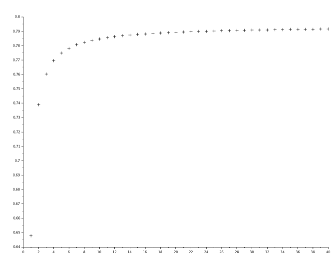
(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n s'annule en un unique point de $[0;1]$. Dans la suite, on notera u_n le réel de $[0;1]$ tel que $f(u_n) = 0$.
(2) Écrire un programme `SciLab` d'entête `y=u(n)`, par méthode de dichotomie avec une erreur de l'ordre de 10^{-6}, donnant une approximation de u_n. On pourra s'inspirer du programme ci-dessous

```
function y=f(x,n)
    y=1-2*x^3+2/n*x*(x-1)
endfunction

function y=u(n)
    a=0;
    b=1;
    while ...........
        if f(a, n)*f((a+b)/2, n) <= 0 then
            ..............
        else
            ..............
        end
    end
    y=a;
endfunction
```

(3) À la suite de ces fonctions, nous avons lancé le programme suivant et obtenu le graphique ci-contre. Que peut-on conjecturer à propos de la convergence de la suite (u_n)?

```
nmax=40; L=[];
for n=1:nmax
    L=[L, u(n)];
end
plot2d(1:nmax, L, -1)
```



(4) Déterminer le sens de variation de (u_n) puis montrer qu'elle converge. Préciser sa limite.