



Chapitre 0. Révisions.

On propose, pour attaquer cette rentrée du meilleur pied, de consacrer les premières séances à des révisions - sous forme d'exercices accessibles pour tou.te.s - balayant (sans exhaustivité) le programme du cours de première année. Les questions ou exercices précédés de (*) nécessitent un peu plus d'effort.

1 Calculs

Exercice 1 (Récurrences). Démontrer par récurrence les résultats suivants.

(1) Soient A , D et P trois matrices telles que : $A = PDP^{-1}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}.$$

(2) Montrer que $\forall n \geq 1$, $J^n = 4^{n-1}J$ où

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n kk! = (n+1)! - 1.$$

(4) Soient x_1, x_2, \dots, x_n des réels. Montrer que : $\prod_{k=1}^n \exp(x_k) = \exp\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)$.

(5) Montrer que : $\forall n \geq 3$, $n! \geq 2 \times 3^{n-2}$.

(6) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{k}{a^k} = \frac{a^{n+1} - (n+1)a + n}{(a-1)^2 a^n}, \quad \text{avec } a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}.$$

(7) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}.$$

Exercice 2 (Calculs de sommes). Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Montrer que

$$\sum_{k=1}^n k(2k^2 - 1) = \frac{n(n+1)(n^2 + n - 1)}{2}.$$

(2) Montrer que

$$\sum_{k=2}^{2n} k + 2^k = n(2n + 1) + 2^{2n+1} - 5.$$

(3) Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{1}{2^i}\right)^2 = \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^{2n}}.$$

(4) Calculer : $\sum_{k=0}^n (k+1)^3 - k^3$.

(5) Calculer : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$ et $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k$.

(6) (a) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$.

(b) En déduire que : $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$ et si $n \geq 2$, $\sum_{k=0}^n (-1)^k k \binom{n}{k} = 0$.

Exercice 3 (Séries usuelles). Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme.

$$(1) \sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1)}{6^n}$$

$$(2) \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!}$$

$$(3) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n}{n!}$$

2 Algèbre

Exercice 4 (Systèmes linéaires).

(1) On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} (2 + \lambda)x + 2y - z = 0 \\ 2x + (\lambda - 1)y + 2z = 0 \\ -x + 2y + (2 + \lambda)z = 0 \end{cases}$$

(a) Résoudre ce système lorsque $\lambda = 0$.

(b) Résoudre ce système lorsque $\lambda = 3$.

(c) Résoudre ce système lorsque $\lambda = -3$.

(2) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Résoudre les équations $AX = 0$, $AX = X$ et $AX = 3X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(3) On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Résoudre les équations $CX = 0$, $CX = -X$ et $CX = 3X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$.

☞ Pour les Questions (2) et (3), on pourra présenter les solutions sous formes de sous-espaces vectoriels engendrés par un nombre fini de vecteurs.

Exercice 5 (Un extrait de **EDHEC 2019**). On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) (a) Déterminer $(A - I)^2$.
 (b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A .
- (2) On pose $A = N + I$.
 (a) Exprimer pour tout entier naturel n , la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N , puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A .
 (b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

3 Analyse

Exercice 6 (Une suite). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$. On introduit la suite auxiliaire $v_n = \frac{u_n}{3^n}$.

- (1) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
- (2) En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 7 (Suite et série). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

- (1) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.
- (2) Étudier le sens de variation et la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi que sa limite.
- (3) On pose pour tout entier n , $v_n = \ln(u_n)$.
 Calculer v_{n+1} en fonction de v_n puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n u_k = v_0 - v_{n+1}$
- (4) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Exercice 8 (Un problème, D'après **ECRICOME 2019**). Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur \mathbb{R}^{+*} par :

$$\forall x > 0 \quad h_n(x) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

- (1) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
- (2) En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation : $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.
- (3) (a) Démontrer que :

$$\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1} - 1)}{x^{n+1}}.$$

- (b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h_{n+1}(v_n) \geq 4.$$

- (c) Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.

- (4) (a) Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer que $\ell \geq 1$.
 (b) En supposant que $\ell > 1$, démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n^n = +\infty.$$

En déduire une contradiction.

- (c) Déterminer la limite de (v_n) .

- (5) (a) Montrer que : $\forall n \geq 1 \quad v_n \leq 3$
 (b) Écrire une fonction **SciLab** d'en-tête `function y=h(n,x)` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbb{R}^{+*}$ en entrée.

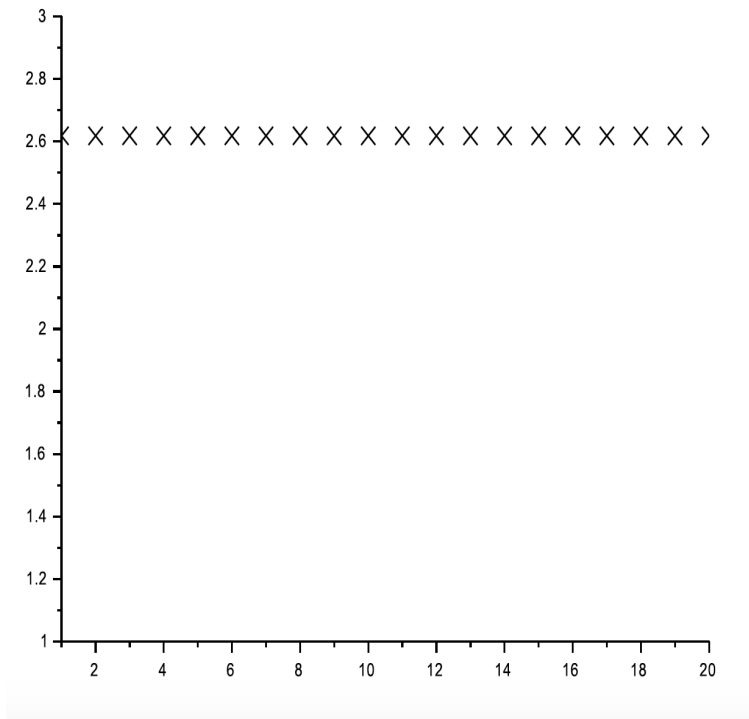
- (c) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de v_n par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier $n \geq 1$ en entrée :

```
function res=v(n)
    a=1
    b=3
    while (b-a)>10^(-5)
        c=(a+b)/2
        if h(n,c) <4 then .....
            else .....
        end
    end
    .....
endfunction
```

- (d) À la suite de la fonction v , on écrit le code suivant :

```
X=1:20
Y=zeros(1,20)
for k=1:20
    Y(k)=v(k)^k
end
plot2d(X,Y,style=-2,rect=[1,1,20,3])
```

À l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :



Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus.

Que peut-on conjecturer ?

- (e) Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \quad (v_n)^n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

- (f) Retrouver ainsi le résultat de la question 4) c.

Exercice 9 (Intégrales). Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$$

- (1) (a) Calculer la dérivée de la fonction $g : x \mapsto (x+1) \ln(x+1) - x$.
- (b) Calculer I_0 .
- (2) (a) Montrer que $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Établir que la suite (I_n) est décroissante.
- (c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.
- (3) (a) Justifier l'égalité : $x^n \ln(1+x) \leq x^n$ pour tout $x \in [0, 1]$.
- (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
- (c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$
- (4) (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

- (b) Montrer que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+2}$$

et en déduire un encadrement de I_n .

- (c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$

4 Probabilités

Exercice 10. Soit p un réel appartenant à l'intervalle $]0; 1[$. On note $q = 1 - p$. On dispose dans tout l'exercice d'une même pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p .

On procède à l'expérience suivante \mathcal{E} : "On effectue une succession illimitée de lancers de la pièce" On note :

- pour tout entier naturel non nul n , X_n la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n premiers lancers de la pièce ;
- pour tout entier naturel non nul j , F_j l'événement : "La pièce donne FACE lors du j -ième lancer";
- Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du second PILE.
Par exemple, si les lancers ont donné dans cet ordre : "FACE, PILE, FACE, FACE, FACE, PILE", alors $Y = 4$.

On admet que les variables aléatoires X_n ($n \in \mathbb{N}^*$) et Y sont définies sur un même espace probabilisé modélisant l'expérience \mathcal{E} .

(1) Simulation informatique.

(a) Écrire une fonction en SciLab d'en-tête :

```
function res=Lancer(p)
```

qui crée un nombre aléatoire dans l'intervalle $[0; 1]$ et renvoie 1 si ce nombre aléatoire est strictement inférieur à p et 0 sinon.

Indication : On rappelle que la fonction `rand()` renvoie un nombre aléatoire dans l'intervalle $[0; 1]$.

(b) Écrire une fonction en SciLab d'en-tête :

```
function res=Premier_Pile(p)
```

qui simule autant de lancers de la pièce que nécessaire jusqu'à l'obtention du premier PILE et renvoie le nombre de lancers effectués.

Indication : si on le souhaite, on pourra utiliser la fonction `Lancer` en la répétant convenablement.

(c) Écrire un programme en SciLab qui demande un réel p à l'utilisateur, puis qui simule autant de lancers de la pièce que nécessaire jusqu'à l'obtention du second PILE, et affiche le nombre de FACE obtenus en tout.

Indication : on pourra utiliser la fonction `Premier_Pile` en la répétant convenablement.

(2) Soit n un entier naturel non nul. Donner la loi de X_n . Préciser la valeur de son espérance $E(X_n)$ et de sa variance $V(X_n)$.

(3) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Y .

(4) Donner les valeurs des probabilités :

$$P(Y = 0), \quad P(Y = 1) \quad \text{et} \quad P(Y = 2)$$

(5) Soit n un entier naturel. Justifier que les événements :

$$(Y = n) \quad \text{et} \quad (X_{n+1} = 1) \cap \overline{F_{n+2}}$$

sont égaux.

(6) Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Y = n) = (n + 1)p^2q^n$$

(7) Vérifier par le calcul que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n) = 1$$

(8) Démontrer que la variable aléatoire Y possède une espérance $E(Y)$ et donner sa valeur.

(9) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du k -ième PILE. En particulier, on a $Y_2 = Y$.

En généralisant la méthode utilisée dans les questions précédentes, déterminer la loi de Y_k .

Exercice 11 (Densité). Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

(1) Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.

On note X une variable aléatoire admettant f comme densité.

(2) Montrer que la fonction de répartition de X est donnée par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x}(1+x) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

Exercice 12 (Densité). Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose : $I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} dt$.

(1) Calculer $I_0(x)$. En déduire que l'intégrale $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente et calculer sa valeur.

(2) Calculer $I_1(x)$. En déduire que l'intégrale $I_1 = \int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ est convergente et calculer sa valeur.

(3) À l'aide d'une intégration par parties, établir :

$$I_{n+1}(x) = -x^{n+1}e^{-x} + (n+1)I_n(x).$$

(4) En déduire, par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

est convergente et que $I_n = n!$.

(5) Soit

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n!} t^n e^{-t}, & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que f_n est la densité d'une variable aléatoire à densité X_n .

(b) Reconnaître la loi de X_0 puis rappeler l'expression de sa fonction de répartition.

(c) Sous quelle condition X_n admet-elle une espérance ? Montrer que X_n admet une espérance et que $E(X_n) = n + 1$.

5 SciLab

Attention, la suite d'exercices et les instructions **SciLab** nécessaires à leur résolution ne constitue en aucun cas une liste exhaustive des compétences à maîtriser en informatique.

Exercice 13. (D'après **EDHEC 2016**) On considère une suite (u_n) qui vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}.$$

(1) Compléter les commandes **SciLab** suivantes qui permettent de calculer et d'afficher un entier n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4} .

```
n=0;
while .....
    n=.....
end
disp(n)
```

(2) Le Script ci-dessus affiche l'une des trois valeurs $n = 55, n = 70$ ou $n = 85$. En prenant 2, 3 comme valeur approchée de $\ln(10)$, déterminer laquelle.

Exercice 14. (D'après **EML 2016**) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x \ln(x), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et la suite (u_n) définie par la relation de récurrence

$$u_0 = \frac{1}{2}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

- (1) (*) Démontrer que (u_n) est croissante et converge vers 1.
- (2) Écrire un programme sous SciLab qui calcule et affiche un entier N tel que

$$1 - u_N < 10^{-4}.$$

Exercice 15. (*D'après EML 2015) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 e^x$.

- (1) Montrer la convergence de la série $\sum \frac{1}{f(n)}$. On note S sa somme.
- (2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}.$$

- (3) En déduire l'écriture d'un programme sous SciLab qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-5} près.

Exercice 16. (D'après EML 2017) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = e^x - e \ln(x)$ et la suite (u_n) définie par la relation de récurrence

$$u_0 = 2, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

- (1) Montrer que (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.
- (2) Écrire un programme sous SciLab qui, étant donné un réel A rentré par l'utilisateur, calcule et affiche un entier naturel N tel que $u_n \geq A$.

Exercice 17. (*D'après ECRICOME 2017) Soit n un entier naturel non nul.

On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k -ième tirage.

Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n .

Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument le nombre n de boules contenues dans l'urne, afin qu'elle simule la variable aléatoire T_n :

```
function y=T(n)
    S = .....
    y = .....
    while .....
        tirage = grand(1,1,'uin',1,n)
        S = S + tirage
        y = .....
    end
endfunction
```

Exercice 18. (*D'après EML 2015) On considère une v.a. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1])$ et on introduit la v.a. V définie par

$$V = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U),$$

où λ est un réel strictement positif.

- (1) Montrer que $V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
- (2) En déduire l'écriture d'une fonction SciLab, notée `y=loi_expo(lambda)` qui, prenant en argument un paramètre `lambda` renvoie une simulation de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.