ECE 1→2 - Eté 2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Ahou tcha tcha tcha - Cahier de vacances

(*) Facile (**) Classique/intermédiaire (***) Difficile

Mini exercices / Questions classiques

Les questions de cette partie sont indépendantes et reprennent des techniques, calculs et notions qui balaient l'ensemble du programme de première année. On aura pas non plus la naïveté de croire que leur maîtrise "suffit".

Naturellement, il est indispensable de connaître parfaitement les différentes formules du cours (formule de sommes classiques, formule du binôme, somme des séries usuelles, lois usuelles, etc...)

Le premier programme de colle de l'année scolaire sera entièrement consacré à la reprise de ces mini-exercices. Chaque étudiant.e en aura toute une série à traiter et il serait très dommage voire pénalisant de ne pas les avoir préparés.

Calcul

(1) (*) Résoudre le système suivant

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y-3z-t & = & 0 \\ 2x+y-5z+4t & = & 4 \\ x-2y+3t & = & -2 \\ -x+y+z-2t & = & -1 \end{array}\right.$$

(2) (*) Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0;n]\!]$,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

(3) (**) Montrer, par la méthode de votre choix, que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \geq p+1$,

$$\sum_{k=p}^{n-1}\binom{k-1}{p-1} = \binom{n-1}{p}.$$

(4) (**) Calculer

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j+1}.$$

Analyse

(5) (*) Montrer que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

(6) (*) Nature de la branche en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt{e^{3x}+x-1}\right)$.

(7) (*/**) Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

(8) (*/**) Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = (u_n^2+1)/2$ est croissanre, majorée par 1 et donc convergente vers une limite à préciser.

(9) (**) Montrer que la fonction f définie ci-dessous est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On commencera par montrer f est continue en 0. Puis, après avoir justifié que f dérivable en dehors de 0 on calculera $f'(x)$, pour $x \neq 0$. On montrera que f dérivable en 0, à l'aide du *développement limité* à l'ordre 2 ci-dessous

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0,$$

et enfin que f' est continue en 0.

(10) (*) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

(*On essaiera de faire apparaître une somme télescopique.*)

(11) (**) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, l'équation $x^{3n} + n^n x^n - 1 = 0$ admet une unique solution strictement positive a_n. Montrer que $a_n < 1/n$ et en déduire la limite de a_n lorsque $n \to +\infty$.

(12) (*/**)Montrer que la fonction $f : x \mapsto x\exp(x^2)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser et donner l'équation de la tangente à la courbe de f^{-1} en 0.

(13) Montrer la convergence et calculer la somme des séries ci-dessous

$$(i)\ \sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)^2(-2)^{n+2}}{5^n}, \qquad (ii)\ \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

(14) (*/**) Calculer, avec un changement de variable, les intégrales

$$(i)\ \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{3t-1}, \quad (u = 3t-1), \quad (ii)\ \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t, \quad (u = 1-\sqrt{t})),$$

$$(iii)\ \int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x, \quad (u = 1+e^x), \quad (iv)\ \int_1^A \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t, \quad (u = \ln(t)).$$

(15) (**) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n\mathrm{d}t = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t = 0$$

(16) (***) Montrer que, pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t.$$

(17) (**/***)

(a) Rappeler la valeur de $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à la suite d'intégrales (I_n) définie par

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t.$$

Justifier la convergence de chaque intégrale I_n. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties réalisée scrupuleusement, que $I_n = nI_{n-1}$. En déduire, par récurrence, que $I_n = n!$.

(18) (*`SciLab`) Écrire un programme qui calcule et affiche petit entier N tel que $u_N \geq A$, où la suite (u_n) est définie par

$$u_0 = 2, \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \exp(u_n) - e\ln(u_n).$$

(19) (**`SciLab`) Écrire un programme de dichotomie permettant de donner une valeur approchée à 10^{-4} de la solution de l'équation $e^x + x = 3$.

(20) (**`SciLab`) Écrire un programme permettant de calculer le terme u_n où la suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad \text{et} \quad u_{n+2} = \frac{7}{2}u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n.$$

Représenter graphiquement les 50 premiers termes de la suite $(u_n/3^n)$. Représenter, interpréter.

Calcul Matriciel

(21) (*/**) Déterminer **soigneusement**, par la formule du binôme, les puissances A^n ($n \in \mathbb{N}^*$) de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(22) (*/**) On considère la matrice A ci-dessous

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) À l'aide du pivot de Gauss, vérifier que A est inversible et calculer son inverse.

(b) Calculer $A^2 - 4A + 3I$. En déduire une nouvelle preuve que A est inversible et donner une expression de A^{-1} en fonction de A et de I.

(23) (*) Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $B^2 + B$ et déduire que B n'est pas inversible.

(24) (*/**) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *nilpotente*, c'est à dire pour laquelle il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

(a) Calculer $(I_n - A)(I_n + A + A^2 + ... + A^{p-1})$.

(b) En déduire que $I_n - A$ est inversible et préciser son inverse.

(25) (*/**) À l'aide du *déterminant*, déterminer les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible, où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(26) (**) Pour chacune des matrices M suivantes, déterminer l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels $A - \lambda I$ n'est pas inversible. Pour chaque valeur λ trouvée, résoudre $(M - \lambda I)X = 0$ où $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$(i)\ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (ii)\ M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (ii)\ M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Probabilités (élémentaires)

(27) (***) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, ..., A_n$ des évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer, par récurrence sur n (et à l'aide de la formule du crible) que

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - (n-1).$$

(28) (**) Un voyageur prend l'avion. À chaque voyage, la probabilité que sa valise soit retardée est de $1/12$ et les incidents de bagages sont indépendants à chaque vol. Montrer **soigneusement** que, presque sûrement (*c'est à dire avec probabilité égale à* 1), ce voyageur subira un retard de valise lors d'une répétition infinie de trajets en avion.

(29) (**/***) (`SciLab`) On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges. On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante: on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la couleur de celle qui vient d'être obtenue.
Écrire, en `SciLab`, une fonction d'en-tête `function s=tirage(n)` qui simule l'expérience étudiée et renvoie le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages, n étant l'entier entré en argument.

Variables aléatoires réelles

(30) (*/**) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$. Montrer $E(X) = (n+1)/2$.

(31) (**/***) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Montrer, à l'aide de la formule du binôme, que $E(X) = np$.

(32) (**/***) Soit X une v.a. finie telle que $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$. Monter que

$$E(X) = \sum_{j=0}^{n-1} P(X > j).$$

(33) (**/***) On effectue des tirages **sans remise** d'une boule dans une urne contenant $N-1$ boules blanches et une boule noire. On note X le rang d'apparition de la boule noire. Montrer soigneusement que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;N]\!])$.

(34) (*) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Montrer que X **admet** une espérance et que $E(X) = 1/p$.

(35) (***) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. On suppose que, **sachant** $(X = n)$, la variable aléatoire Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Montrer que $Y \hookrightarrow P(p\lambda)$.

(36) (***) Soient X et Y deux v.a. indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. Montrer que $\min(X,Y) \hookrightarrow \mathcal{G}(1-(1-p)^2)$.
☞ Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont dites *indépendantes* si et seulement si pour tout $(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = P(X = i)P(Y = j).$$

On commencera par calculer $P(X \geq k)$, puis, notant $Z = \min(X, Y)$, $P(Z \geq k)$ et on utilisera le fait que,

$$P(Z = k) = P(Z \geq k) - P(Z \geq k+1).$$

(37) (**)
(a) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$. Montrer que

$$-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).$$

(b) En déduire une instruction `SciLab` pour simuler une loi exponentielle de paramètre λ (rentré par l'utilisateur) à l'aide de la commande `rand()`.

(38) (***) Soient X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes de même loi $\mathcal{U}([0;1])$. Montrer que

$$E(\max(X_1, X_2)) = 2/3.$$

☞ On dit que X_1 et X_2 sont *indépendantes* si et seulement si, pour tous $x, t \in \mathbb{R}$,

$$P([X_1 \leq t] \cap [X_2 \leq x]) = P(X_1 \leq t)P(X_2 \leq x).$$

On commencera donc par exhiber la fonction de répartition de $\max(X_1, X_2)$ pour on précisera une densité et enfin on pourra calculer l'espérance.

(39) (*/**) (`SciLab`) Écrire, uniquement à l'aide de la fonction `rand()` une fonction `X=bino(n,p)` permettant de simuler une loi binomiale de paramètres n et p.

(40) (*/**) (`SciLab`) Écrire, uniquement à l'aide de la fonction `rand()` une fonction `X=Attente(p)` permettant de simuler une loi géométrique de paramètre p.

Simple. Basique.

Exercice 1. (**`SciLab`, d'après **ESSEC II 2019**) On considère un vecteur $P = (p_0, p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n$ (où n est arbitraire) dont toutes les composantes sont strictement positives. Écrire (de deux manières différentes) une fonction `function y=h(P)` (où `P` est un vecteur (de longueur) quelconque) renvoyant la quantité

$$h = -\sum_{k=0}^{n} p_k \frac{\ln(p_k)}{\ln(2)}.$$

On rappelle que l'instruction `length(P)` permet d'obtenir le nombre de composantes d'un vecteur `P` quelconque.

Exercice 2. (**Implicitement votre) Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n qui à tout réel x associe le nombre

$$f_n(x) = n - xe^x.$$

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0; +\infty[$. Cette solution sera notée u_n.
(2) Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant $f_{n+1}(u_n)$, montrer que la suite (u_n) est croissante.
(3) Montrer par l'absurde que la suite (u_n) n'est pas convergente. Qu'en déduit-on sur sa limite?
(4) Déterminer u_0.
(5) Proposer un programme `SciLab` permettant de calculer et d'afficher une valeur approchée à 10^{-3} de u_1.

Exercice 3. (**Pour en finir avec les accroissements) On considère la fonction f, dont la courbe est notée C_f, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - 2 + \exp(-x).$$

(1) (a) Calculer

$$\lim_{x \to +\infty} f(x).$$

(b) Montrer que la courbe C_f admet en $+\infty$ une droite asymptote Δ d'équation $y = x - 2$.
(c) Calculer

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \quad \text{puis} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Que pouvez-vous dire sur le comportement asymptotique de la courbe de f en $-\infty$?

(2) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x. Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

(3) Justifier que C_f coupe l'axe des abscisses en exactement deux points d'abscisses α et β, le premier étant positif, le deuxième étant négatif.

On donne $e \approx 2{,}7$. Prouver que $\alpha \in]1, 2[$.

(4) Tracer l'allure de C_f et Δ. On donne $\alpha \approx 1{,}84$ et $\beta \approx -1{,}14$.

(5) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2 - \exp -x$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout entier naturel n.

(a) Montrer que pour tout réel x, on a : $g(x) = x$ si et seulement si $f(x) = 0$.
(b) Calculer la dérivée de g. En déduire le sens de variation de g.
Montrer alors que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n.
(c) Établir que pour tout réel x appartenant à $[1, 2]$: $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{e}$.
(d) En déduire, en appliquant l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier naturel n

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha|.$$

(e) Montrer par récurrence que

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{\exp(n)}.$$

Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
(f) Écrire un programme `SciLab` permettant d'obtenir une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

Exercice 4. (**Pour intégrer l'intégration)
Pour tout entier n on note:

$$I_n = \int_0^1 e^{-x^2}(1-x)^n dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 xe^{-x^2}(1-x)^n dx.$$

(1) (a) Former le tableau de variation sur [0,1] de $x \to xe^{-x^2}$.
(b) En déduire pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{\sqrt{2e}(n+1)}.$$

(c) Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(2) (a) A l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+1}.$$

(b) En déduire la limite de I_n et celle de nI_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5. (*) Un commerçant dispose d'un stock de plantes. Chacune des plantes fleurit une fois par an. Pour chaque plante ,la première année, la probabilité de donner une fleur rose vaut $\frac{3}{4}$, la probabilité de donner une fleur blanche vaut $\frac{1}{4}$. Puis les années suivantes, pour tout entier naturel n non nul :

- si l'année n, la plante a donné une fleur rose, alors l'année $n + 1$ elle donnera une fleur rose.
- si l'année n la plante a donné une fleur blanche, alors elle donnera l'année $n+1$ de façon équiprobable une fleur rose ou une fleur blanche.

On désigne par n un entier naturel non nul. Pour une plante donnée, on note p_n, la probabilité de l'événement R_n "la plante donne une fleur rose la nième année".

(1) A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite arithmético-géométrique qui vérifie :
$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}$$
(2) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et de p_1 .
(3) Que vaut p_1 ? En déduire p_n , ainsi que la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$
(4) (a) Quelle est la probabilité pour que la plante ne donne que des fleurs roses pendant les n premières années ?
    (b) Quelle est la probabilité pour que la plante ne donne que des fleurs blanches pendant les n premières années ?

SciLab

Une guirlande électrique est composée de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3, S_4 et change d'état de la manière suivante:

- à l'instant $t = 0$, le spot S_1 est allumé;
- si, à l'instant $t = n$ le spot S_1 est allumé, alors un (et un seul) des spots s'allume à l'instant $t = n+1$, et ceci de manière équiprobable;
- si, à l'instant $t = n$ le spot S_k $(2 \leq k \leq 4)$ est allumé, le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t = n + 1$. On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note X la variable aléatoire représentant le premier instant où le spot S_2 s'allume.

Écrire une fonction `y=spot2()` qui simule la variable aléatoire X.
On rappelle que la commande `grand(1,1, 'uin', a, b)` *permet de simuler une variable suivant une loi uniforme* $\mathcal{U}(⟦a;b⟧)$.

Variables aléatoires finies : apparition du premier roi rouge

Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges (carreau et coeur), et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

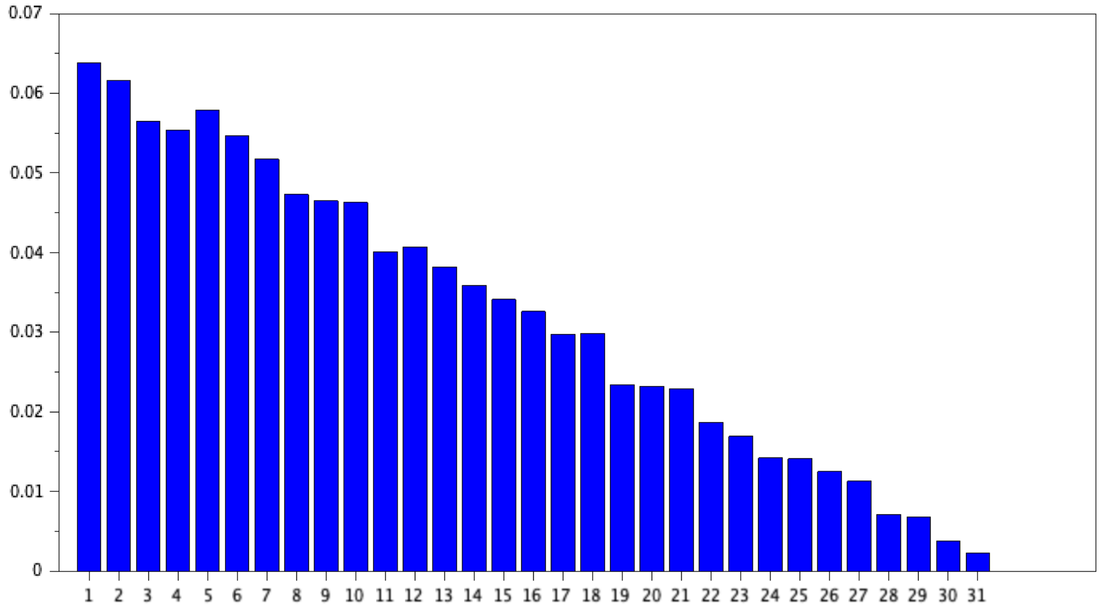
Partie 1 - Premier protocole

Les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon alétoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge.

(1) (`SciLab`).
    (a) Compléter la fonction suivante afin qu'elle simule la variable X.

```
function y=X(n)
    y=1
    T=2*n //nombre total de cartes à retourner
    while ...................
        y=...........
        T=...........
    end
endfunction
```

    (b) Pour $n = 16$, on simule 1000 fois la variable X et on représente le diagramme à bâtons des fréquences obtenues pour chaque valeur, que l'on fait apparaître ci-dessous.



Donner une estimation graphique de $P(X=1)$. Que vaut vraiment $P(X=1)$?.
Donner des estimations de $P(X=2), P(X=3)$.

(2) Que vaut $X(\Omega)$?
(3) Montrer que, pour tout $k \in X(\Omega)$,
$$P(X=k) = \frac{2n-k}{n\,(2n-1)}.$$
(4) Montrer que $E(X) = \dfrac{2n+1}{3}$.

Le joueur perd un euro chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros lorsqu'il obtient le premier roi rouge.
On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte, G_1 est égale à $a-k$.

(5) Exprimer G_1 en fonction de a et X. En déduire l'expression de $E(G_1)$ en fonction de a et n.

(6) Quelle commande `SciLab` permet de simuler, à partir de la fonction écrite précédemment, la variable G_1?

Partie 2 - Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes.

Le joueur perd un euro à chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros losqu'il obtient le premier roi rouge.

On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte ($k \leqslant n$), G_2 est égale à $a-k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

(7) Écrire, en reprenant une partie du programme précédent, une fonction `SciLab`, d'en-tête `function y=G_2(a,n)`, qui simule la variable G_2.

(8) Pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$, déterminer $P\left(G_2 = a - k\right)$.
(9) Vérifier que

$$P(G_2 = -n) = \frac{n-1}{2\left(2n-1\right)}.$$

(10) Obtenir alors que

$$E\left(G_2\right) = \frac{3\left(3n-1\right)a - \left(7n^2-1\right)}{6\left(2n-1\right)}.$$

(11) On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$). Déterminer (éventuellement avec l'aide de `SciLab`), selon les valeurs de a, le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.

Probabilités continues

(**/***) On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et indépendantes. On suppose que X est une variable à densité et on note F_X sa fonction de répartition. On suppose par ailleurs que la loi de Y est donnée par

$$P(Y=1) = P(Y=-1) = \frac{1}{2}.$$

L'indépendance de X et Y se traduit par les égalités suivantes, valables pour tout réel x,

$$P\left([X \leq x] \cap [Y=1]\right) = P\left(X \leq x\right) P\left(Y=1\right)$$

et

$$P\left([X \leq x] \cap [Y=-1]\right) = P\left(X \leq x\right) P\left(Y=-1\right).$$

On pose $Z = XY$ et on admet que Z est, elle-aussi, une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On se propose d'établir deux résultats utiles pour la suite dans la partie 1, puis d'en déduire la loi de la variable aléatoire Z en fonction de la loi de X dans les parties 2 et 3.

Partie 1 : Expression de la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X.

(1) Rappeler l'expression des fonctions de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a,b]$ (avec $a < b$) et d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).
(2) En utilisant le système complet d'événements $\{(Y=1), (Y=-1)\}$, montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \frac{1}{2}\left(F_X(x) - F_X(-x) + 1\right).$$

Partie 2 : Étude de deux premiers exemples.

(1) On suppose que la loi de X est la loi normale centrée réduite.
Reconnaître la loi de Z.
(2) On suppose que la loi de X est la loi uniforme sur $[0,1]$.
  (a) Déterminer l'expression de $F_X(-x)$ selon les valeurs prises par x.
  (b) Déterminer $F_Z(x)$ pour tout réel x, puis reconnaître la loi de Z.

Partie 3 : Étude du cas où la loi de X est la loi exponentielle de paramètre 1.

(1) (a) Montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est définie par :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}e^{x}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

  (b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité.
  (c) Établir alors qu'une densité de Z est la fonction f_Z définie pour tout réel x par

$$f_Z(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

(d) Donner la valeur de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx.$$
(e) Montrer que f_Z est une fonction paire et en déduire l'existence et la valeur de $E(Z)$.

(2) (a) Donner la valeur de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx.$$
(b) En déduire l'existence et la valeur de $E(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de Z.

(3) (a) Déterminer $E(X)E(Y)$ et comparer avec $E(Z)$. Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

(b) Exprimer Z^2 en fonction de X, puis en déduire de nouveau la variance de Z.

(4) Soit U et V des variables aléatoires suivant respectivement la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ et la loi uniforme sur $[0,1[$.

(a) On pose $Q = -\ln(1-V)$ et on admet que Q est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de Q et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire Q.

(b) On pose $R = 2U-1$ et on admet que R est une variable aléatoire. Déterminer $R(\Omega)$ et donner la loi suivie par la variable R.

(c) Informatique.
En tenant compte des résultats des questions 5a) et 5b), écrire en `SciLab` une déclaration de fonction dont l'entête est `function y=Z()` pour qu'elle simule la loi de Z.

©Bill Watterson, *Calvin & Hobbes*

Si le délai de réponse est naturellement rallongé pendant la période estivale, on invite néanmoins à lister les difficultés rencontrées clairement formulées et à prendre contact par courriel (`frederic@gaunard.com`) afin de ne pas rester *bloqué.e* trop longtemps. En particulier, les échanges peuvent être réguliers lors de la deuxième quinzaine du mois d'Août. (Il est par ailleurs capital de s'y *remettre* (bien) avant la rentrée, pour une reprise sous les meilleures auspices.)

Bonnes et belles vacances à tou.te.s!