ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Approfondissement

Autour de la notion d'indicatrice
Mars-Avril 2020

Préambule

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et A un évènement.

On appelle *variable indicatrice* de l'évènement A la variable aléatoire notée $\mathbb{1}_A$ définie par

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in A \\ 0, & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

(1) Reconnaître la loi de $\mathbb{1}_A$ et son espérance.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On introduit la *fonction indicatrice* de I avec la formule

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in I \\ 0, & \text{si } x \notin I \end{cases}$$

Soient X une variable aléatoire réelle de densité f et $s \in \mathbb{R}$. On remarque alors que

$$\mathbb{1}_{[X \geq s]} = \chi_{[s;+\infty[}(X).$$

(2) Soient X une variable aléatoire réelle de densité f et $s \in \mathbb{R}$. Soit $Y = g(X)$ une autre variable aléatoire. Justifier soigneusement, que $\mathbb{1}_{[X \geq s]}Y$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[s;+\infty[}(x) g(x) f(x) \mathrm{d}x = \int_s^{+\infty} g(x) f(x) \mathrm{d}x$$

converge.

Exercice 1

(1) *Question de cours:* Rappeler l'inégalité de Markov.

Un fabricant cherche à optimiser le prix de vente p de son produit. Il suppose que chaque client potentiel est prêt à payer un prix aléatoire X pour acheter le produit. Si X est supérieur ou égal à p, la vente a lieu le fabricant encaisse p euros; sinon la vente n'a pas lieu et le fabricant n'encaisse aucun chiffre d'affaires.

On suppose que X admet une densité de probabilité f continue sur $\mathbb{R}_+$ et une espérance finie. On note F la fonction de répartition et Z_p le chiffre d'affaires réalisé si le prix de son produit est fixé à la valeur p et on définit la fonction g sur $\mathbb{R}_+$ par $g(p) = E(Z_p)$.

(2) Exprimer Z_p à l'aide de $\mathbb{1}_{(X \geq p)}$ puis montrer que $g(p) = p(1 - F(p))$.
(3) Montrer que $g(p)$ tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$.
(4) Que vaut $g(0)$? Dessiner l'allure de la courbe de g. En déduire que g admet un maximum sur $\mathbb{R}_+$, atteint en une valeur $p^* > 0$.
(5) Expliciter une équation vérifiée p^*.
(6) Quel chiffre d'affaires maximal peut espérer le fabricant si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$?

Exercice 2

On étudie le jeu suivant: X_1 et X_2 étant deux variables indépendantes de loi uniforme sur $[0;1]$, un joeur observe d'abord X_1. S'il décide d'en rester là, il gagne la valeur observée. S'il décide de continuer, il observe et gagne X_2. On note G la v.a. correspondant au gain du joueur.

(1) Sa première stratégie est de toujours continuer et observer X_2. Quelle est alors l'espérance de son gain?
(2) Dans un deuxième temps, il décide de continuer et d'observer X_2 si et seulement si $X_1 \leq s$, où $s \in [0;1]$ est un seuil qu'il se fixe à l'avance.
  (a) Justifier que
$$G = \mathbb{1}_{X_1 \geq s} X_1 + \mathbb{1}_{X_1 < s} X_2.$$
  (b) Écrire un programme `SciLab` qui demande à l'utilisateur d'entrer le seuil s et simule le gain.
  (c) Quelle est l'espérance du gain dans ce cas?
  (d) Quelle valeur s doit-il choisir pour maximiser cette espérance?

(3) Si, dans une variante du jeu précédent, on pouvait observer X_1 et X_2 avant de prendre une décision, quelle serait la stratégie et combien rapporterait-elle en moyenne?

Problème

On rappelle que si X est une variable aléatoire **admettant une variance**, alors la loi faible des grands nombres permet d'affirmer que, notant $(X_1, ..., X_n)$ un $n-$échantillon de X, on a

$$\forall t > 0, \qquad P\left(\left|\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - E(X)\right| > t\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La preuve de ce résultat repose sur l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (on invite d'ailleurs à la reprendre avant d'attaquer ce problème). L'objectif est de montrer que ce résultat reste vrai lorsque X admet une espérance mais pas de variance.

Pour simplifier les calculs, on se place dans la situation d'une variable X centrée.

On considère donc une variable aléatoire X de densité[1] f, d'espérance nulle dont on a un $n-$échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Partie 1 - Des variables tronquées

Soit $A > 0$ fixé. Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on introduit les variables

$$Y_k = X_k \cdot \mathbb{1}_{(|X_k| \leq A)}, \qquad \text{et} \qquad Z_k = X_k \cdot \mathbb{1}_{(|X_k| > A)}.$$

(1) Quelle relation a-t-on entre X_k, Y_k et Z_k?
(2) Montrer que Y_k admet un moment d'ordre 2 et que $E(Y_k^2) \leq A^2$.

On admet que

$$\lim_{A \to +\infty} E(Y_k) = E(X_k) = 0 \quad \text{et que} \quad \lim_{A \to +\infty} E(Z_k) = 0.$$

Partie 2 - Inégalités

Dans toute la suite, on considère $\varepsilon > 0$ fixé.

(3) Soients $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$|x + y| > t \Longrightarrow \left(\left[|x| > \frac{t}{2} \right] \text{ ou } \left[|y| > \frac{t}{2} \right] \right)$$

(4) On note alors

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}, \quad \overline{Y}_n = \frac{Y_1 + ... + Y_n}{n} \quad \text{et} \quad \overline{Z}_n = \frac{Z_1 + ... + Z_n}{n}.$$

Déduire de la question précédente que

$$P\left(|\overline{X}_n| > t\right) \leq P\left(|\overline{Y}_n| > \frac{t}{2}\right) + P\left(|\overline{Z}_n| > \frac{t}{2}\right).$$

(5) (a) En réutilisant la Question (4), montrer que

$$P\left(|\overline{Z}_n| > \frac{t}{2}\right) \leq nP\left(|Z_1| > \frac{nt}{2}\right).$$

(b) En déduire, à l'aide de l'inégalité de Markov, qu'il existe $A_1 > 0$, tel que, si $A \geq A_1$,

$$P\left(|\overline{Z}_n| > \frac{t}{2}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(6) (a) Montrer que

$$E(\overline{Y}_n^2) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} E(Y_k^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(Y_i Y_j) \right).$$

(b) Montrer que, pour $i \neq j$,

$$E(Y_i Y_j) = E(Y_i)E(Y_j) = E(Y_1)^2$$

En déduire que

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(Y_i Y_j) \leq n(n-1)E(Y_1)^2.$$

(c) Obtenir ensuite que

$$E(\overline{Y}_n^2) \leq \frac{A^2}{n} + E(Y_1)^2.$$

[1]Tout ceci fonctionne de manière analogue dans le cas d'une variable discrète

(d) Justifier de l'existence d'un $A_2 > 0$ tel que pour $A \geq A_2$,

$$E(Y_1)^2 \leq \frac{16\varepsilon}{t^2}.$$

(e) Utiliser une inégalité de Markov pour obtenir que

$$P\left(|\overline{Y}_n| > \frac{t}{2}\right) \leq \frac{t^2A^2}{4n} + \frac{\varepsilon}{4}.$$

(7) Montrer que si $A \geq \max(A_1, A_2)$,

$$P\left(|\overline{X}_n| > t\right) \leq \frac{t^2A^2}{4n} + \frac{3\varepsilon}{2}.$$

(8) Conclure.