ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Dernier entraînement

Période du 10 au 20 Juin

Semaine 1000 - Compléments

Problème 1

Soient λ un réel strictement supérieur à 2 et X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

(1) Donner l'expression de la fonction de répartition de X et préciser son espérance et sa variance.

(2) On considère une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ et on pose pour tout entier n non nul

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

(a) Calculer $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

(b) En déduire que S_n est un estimateur sans biais et convergent de $\dfrac{1}{\lambda}$.

(3) Montrer que $E\left(\mathrm{e}^X\right)$ et $E\left(\mathrm{e}^{2X}\right)$ existent et valent respectivement $\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$ et $\dfrac{\lambda}{\lambda-2}$.

On pose $Y = \mathrm{e}^X$ et on admet que Y est une variable aléatoire et on note F_Y sa fonction de répartition.

(4) (a) Justifier que $Y(\Omega) = [1;+\infty[$.

(b) Déterminer $F_Y(t)$ pour $t < 1$ puis montrer que $F_Y(t) = 1 - t^{-\lambda}$ pour $t \geq 1$.

(c) En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Y.
On dit que Y suit une loi de Pareto de paramètres λ et 1, notée $\mathcal{P}(\lambda, 1)$.

(5) (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $E\left(Y^k\right)$ existe si et seulement si $k < \lambda$.
Justifier alors que Y admet une espérance et une variance.

(b) Calculer, à l'aide de la question 3, les valeurs de l'espérance et de la variance de Y.

On considère une suite de variables aléatoires $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, indépendantes et suivant toutes la même loi de Pareto $\mathcal{P}(\lambda, 1)$ que Y (définie à la question 4c) et on pose pour tout entier n non nul : $Z_n = \min(Y_1, \ldots, Y_n)$.

(6) Simulation informatique.

(a) On rappelle qu'en `SciLab`, la commande `grand(1,1,'exp',1/m)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre m.
Écrire une fonction d'entête `function Y = Pareto(lambda)` qui permet de simuler la variable aléatoire $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda, 1)$ suivant une loi de Pareto de paramètres `lambda` et 1.

(b) Compléter la fonction suivante pour qu'elle permette de simuler la variable Z_n.

```
function Z = Simu_Z(lambda,n)
    Y = Pareto(lambda)
    Z = Y
    for i = ............. do
        Y = Pareto(lambda)
        if ............. then
            Z = .............
        end
    end
endfunction
```

(c) On considère le script donné en annexe ainsi que les graphiques associés.
A partir des graphiques obtenus, conjecturer la loi suivie par la variable Z_n.

(7) (a) Soit $t \geq 1$. Montrer que : $P(Z_n > t) = t^{-\lambda n}$.

(b) En déduire la fonction de répartition de Z_n puis vérifier que Z_n suit également une loi de Pareto dont on précisera les paramètres.

On considère encore une suite de variables aléatoires $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, indépendantes et suivant toutes la même loi de Pareto $\mathcal{P}(\lambda, 1)$ que Y (définie à la question 4c). On souhaite construire un estimateur du paramètre λ par une méthode dite du *maximum de vraisemblance*[1].
Soit n un entier naturel non nul et x_1, x_2, ..., x_n, n réels supérieurs ou égaux à 1. On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

et on définit alors la fonction H, sur $\mathbb{R}_+^*$, par

$$H \;:\; \lambda \longmapsto H(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda\, x_i^{-\lambda-1}.$$

(8) On définit la fonction $\varphi \;:\; \lambda \longmapsto \varphi(\lambda) = \ln(H(\lambda))$.

(a) Montrer que : $\varphi(\lambda) = n\ln(\lambda) - (\lambda+1)S_n$.

(b) Calculer $\varphi'(\lambda)$ puis montrer que φ admet un maximum atteint en $\lambda^* = \dfrac{n}{S_n}$.

[1] Méthode déjà rencontrée dans quelques sujets EDHEC

(9) On pose

$$T_n = \frac{n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln(Y_i)}$$

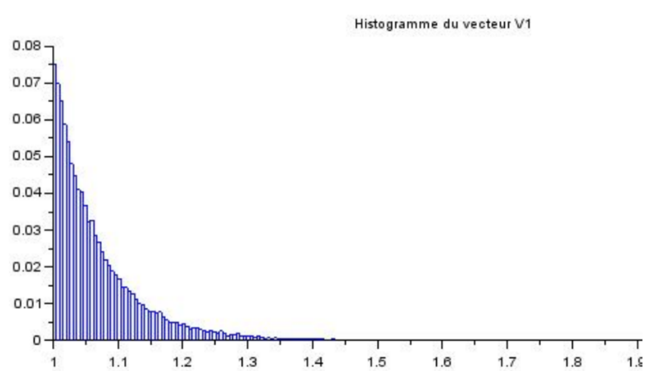
et **on admet** que

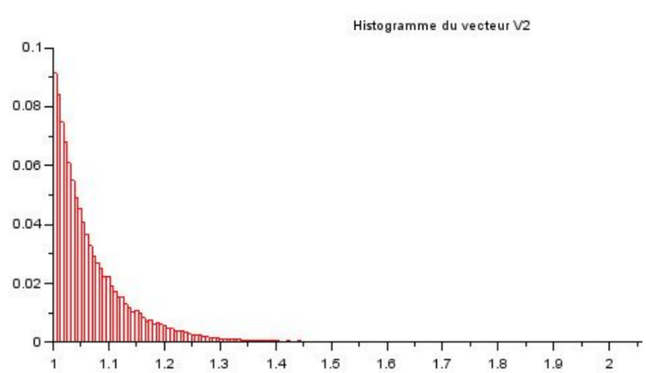
$$E(T_n) = \frac{n}{n-1}\lambda, \qquad \text{et} \quad V(T_n) = \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\lambda^2.$$

(a) Justifier que T_n est un estimateur de λ.
(b) Montrer que T_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de λ puis déterminer un réel c_n tel que $T'_n = c_n T_n$ soit un estimateur sans biais de λ.
(c) Déterminer le risque quadratique de T'_n puis en déduire que c'est un estimateur convergent de λ.

```
lambda = input('lambda=?')
n = input('n=?')
V1 = [ ]
V2 = [ ]
for i = [1:50000]
    V1 = [ V1, Simu_Z(lambda , n) ];
    V2 = [ V2, Pareto(lambda*n) ];
end
histplot(200, V1)
xtitle("Histogramme_du_vecteur_V1")
histplot(200, V2)
xtitle("Histogramme_du_vecteur_V2")
```

Pour différentes valeurs de *lambda* et n entrées par l'utilisateur, on obtient des graphiques similaires à ceux reproduits ci-dessous (seules les valeurs numériques changent).





Problème 2

Si $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n), (i_n)$ désignent neuf suites convergentes, de limites respectives $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, et si (M_n) est une suite de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix},$$

on dit que la suite de matrices (M_n) *admet une limite coefficient par coefficient*, et on note

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose, pour tout entier naturel n

$$S_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k.$$

Lorsque $(S_n(A))$ admet une limite coefficient par coefficient, on note e^A cette limite.

(1) Montrer que, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ est diagonale, alors e^D existe et vaut

$$e^D = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix}.$$

(2) Dans cette question, la matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Calculer A^2 et A^3 puis, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, déterminer A^k.
(b) Donner, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression de $S_n(A)$. En déduire l'existence et l'expression de la matrice e^A.

(3) Dans cette question, la matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Calculer A^2.
(b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, déterminer pour tout k de $\mathbb{N}$ l'expression de A^k en fonction de k.
(c) Établir, pour tout entier naturel n, l'égalité suivante

$$S_n(A) = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) A.$$

(d) En déduire que e^A existe et que

$$e^A = I + \frac{e^3 - 1}{3} A.$$

(4) Dans cette question, la matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

(a) Déterminer les valeurs propres de A. Justifier que A est diagonalisable et expliciter une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

(b) En déduire une expression de $S_n(A)$ en fonction de n.
(c) Conclure que e^A existe et l'expliciter.

(5) Plus généralement, si A est une matrice diagonalisable, que dire de e^A?

Exercice

Pour tout entier n strictement positif, on considère l'expérience suivante : on dispose de n urnes initialement vides, numérotées de 1 à n et on dispose d'un grand stock de boules que l'on dépose une à une dans ces urnes.

Pour chaque boule, on choisit au hasard, de façon équiprobable, l'urne dans laquelle la boule est déposée.

On note X_n le rang du premier tirage après lequel une des urnes contiendra deux boules et, pour $i \in [\![1; n]\!]$, on note U_i le numéro de l'urne dans laquelle on place la boule numéro i.

(1) Reconnaître la loi de U_i.

(2) Compléter la fonction SciLab suivante pour qu'elle simule une réalisation de la variable aléatoire X_n :

```
function X = tirage(n)
    urnes = zeros(1,n)
    X = 1
    choix = ......................
    while ......................
        urnes(choix) = urnes(choix)+1
        choix = .......................
        X = ..........
    end
endfunction
```

(3) On suppose dans cette question que $n = 1$.
Déterminer la loi de X_1 ainsi que son espérance et sa variance.

(4) On suppose dans cette question que $n = 2$.
Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance et sa variance.

(5) On se place ici dans le cas général, n désigne un entier strictement positif.
(a) Justifier brièvement que $X_n(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$.
(b) On introduit les évènements A_i "l'urne choisie au $i-$ème tirage est différente des $i-1$ urnes choisies précédemment". Justifier que, pour $k \in [\![2; n+1]\!]$,

$$P(X_n > k-1) = P\left(A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_{k-1}\right),$$

puis, à l'aide de la formule des probabilités composées, calculer $P(X_n > k-1)$.

(c) Montrer que

$$\forall k \in [\![2, n+1]\!], \quad P(X_n = k) = \frac{n!(k-1)}{n^k(n-k+1)!}.$$

(d) En déduire la formule

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n^j(n-j)!} = \frac{1}{(n-1)!}.$$