ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Pot pourri

Sélection d'exercices

Exercice 1.

(1) *Question de cours* : Définitions de Gradient, points critiques d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(2) Soit f la fonction qui à tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe le réel $e^{-x^2-y^2}$. Déterminer les points critiques de la fonction f. Cette fonction présente-t-elle des *extrema*?

Exercice 2. Dans cet exercice, on cherche à estimer numériquement l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{u}{1+u^3}\mathrm{d}u.$$

(1) Justifier que I est bien définie.
(2) Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0;1]$. Montrer que la variable aléatoire $Y = \frac{U}{1+U^3}$ admet une espérance et que celle-ci vaut I.
(3) On souhaite estimer l'espérance de Y. Pour cela, on considère un $n-$échantillon $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ de Y et l'estimateur

$$\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

 (a) Proposer un programme `SciLab` permettant de calculer une approximation de I grâce à $\overline{Y}_n$, n étant entré par l'utilisateur.
 (b) Prouver que Y admet une variance et que $V(Y) \leq 1$.
 (c) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$P\left(|\overline{Y}_n - I| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

 (d) Déterminer un entier n tel que l'écart entre $\overline{Y}_n$ et I ait au moins 95% de chances d'être inférieur à 10^{-3}.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $1/2$. X a-t-elle plus de chances d'être paire ou impaire?

Exercice 4. Pour $x > 0$, on pose

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\mathrm{d}t.$$

⚠ $0^x = 0$

$\lim_{t \to 0} t^x = 0 \quad (x>0)$

(1) Vérifier que, pour tout $x > 0$, on a

$$f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}.$$

(2) Donner le sens de variations de f.
(3) (a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
 (b) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$, lorsque $x \to +\infty$, obtenu en encadrant $f(x)$.
(4) Écrire un programme `SciLab`, utilisant la méthode de *Monte-Carlo*, permettant d'obtenir une valeur approchée de $f(5)$.

Exercice 5. On définit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$P(X=n) = a\ln\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n+1}}\right),$$

où a est un réel. On noter $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x.

(1) Déterminer la valeur de a.
(2) Montrer que, lorsque $n \to +\infty$,

$$\ln\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n+1}}\right) \sim \frac{2}{n^2}.$$

(3) X admet-elle une espérance ? Une variance ?
(4) On considère une variable aléatoire U suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([0;1[)$ et on pose

$$Y = \left\lfloor \frac{2}{3^{1-U}-1} \right\rfloor.$$

Montrer que X et Y ont la même loi.
(5) Proposer une fonction `SciLab` nommée X renvoyant une simulation de X.

Exercice 6. On considère la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}(T)$ des matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec T, c'est à dire telles que $CT = TC$.

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A^2 = 0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont A est la matrice dans la base canonique.

(2) Justifier qu'il existe un vecteur $x \neq 0$ tel quel $f(x) \neq 0$. Montrer que $(x, f(x))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et donner la matrice de f dans cette base.
(3) En déduire qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PTP^{-1}$.
(4) On note $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A. Montrer que

$$M \in \mathcal{C}(A) \Longleftrightarrow P^{-1}MP \in \mathcal{C}(T).$$

(5) Déterminer $\mathcal{C}(A)$. On montrera que c'est un espace vectoriel et on en déterminera une base et la dimension.

Exercice 7.

(1) *Question de cours* : Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$. Rappeler la définition de la dérivabilité de f en x_0.
(2) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} f(0), & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t, & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

(a) Montrer, pour tout réel x non nul, l'égalité

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{F(x)-F(0)}{x} - \frac{F(-x)-F(0)}{x}\right).$$

(b) En déduire que g est continue en 0.
(c) Montrer enfin que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Justifier que f est un automorphisme.
(2) Déterminer $f \circ f \circ f \circ f$ et en déduire l'expression de A^{-1} en fonction de A.
(3) Déterminer le spectre de f. La matrice A est-elle diagonalisable?

Exercice 9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a > 0$. On considère une suite de v.a. (X_n) dont la fonction de répartition est donnée par

$$F_{X_n}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1 - \exp\left(-ax - \frac{x^2}{2n}\right), & \text{si } 0 \leq x < 2n \\ 1, & \text{si } x \leq 2n \end{cases}$$

(1) Montrer que (X_n) converge en loi vers une v.a dont on précisera la loi.
(2) Soient $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et $\alpha \in]0; 1[$.
    (a) Déterminer deux réels c et d strictement positifs tels que

$$P(c \leq Z \leq d) = 1 - \alpha, \quad \text{et} \quad P(Z \leq c) = \frac{\alpha}{2}.$$

    (b) Quelle est la loi de aZ?
    (c) Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(a \in \left[\frac{c}{X_n}; \frac{d}{X_n}\right]\right) = 1 - \alpha.$$

    (d) Que peut-on dire de l'intervalle

$$\left[\frac{c}{X_n}; \frac{d}{X_n}\right]?$$

Exercice 10. Soit p un réel de $]0; 1[$ et $q = 1 - p$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi de Bernoulli telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X_k = 1) = p, \quad \text{et} \quad P(X_k = 0) = q.$$

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on définit pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, la variable aléatoire $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

(1) (a) Calculer pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\text{Cov}(Y_k, Y_{k+1})$.
    (b) Montrer que

$$0 < \text{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) < \frac{1}{4}.$$

(2) Calculer, pour tout couple (k, l) tel que $1 \leq k < l \leq n$, $\text{Cov}(Y_k, Y_l)$.

(3) On note ε un réel strictement positif fixé. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k - 2p\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Exercice 11. Expliquer ce que fait le programme (ce que représentent les deux variables aléatoires X et Y simulées ici; on pourra notamment y associer une expérience aléatoire).

```
function [x,y]=X_Y(n)
    L=1:n
    x=grand(1,1,'uin',1,n)
    L=[L(1:x-1),L(x+1:n)]
    y=L(grand(1,1,'uin', 1, n-1))
endfunction
```

Exercice 12. (Accelérateur de convergence) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_n = \frac{n-1}{n^3+1}, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

(1) Montrer que l'on a, pour $n \geqslant 2$:

$$0 < a_n < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

En déduire que la série $\sum a_n$ est convergente. On notera A sa somme (qu'on ne cherchera pas à calculer explicitement).

(2) Donner, en fonction de n, un majorant très simple de $A - A_n$.

(3) À partir de quelle valeur de n, peut-on affirmer que A_n est une valeur approchée de A à moins de 10^{-4} près ?

(4) Pour accélérer la convergence, on pose :

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - b_n.$$

(a) Calculer b_n en fonction de n et vérifier que l'on a :

$$\forall n \geqslant 2, \quad 0 < b_n < \frac{6}{n^5} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{6}{t^5} \mathrm{d}t$$

(b) Vérifier que l'on a :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

et

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right).$$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, on pose

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Exprimer B_n en fonction de n et de A_n, en déduire que la suite (B_n) est convergente.

(d) Soit B la limite de la suite (B_n). Montrer que : $B - B_n \leq \dfrac{3}{2n^4}$.

A partir de quelle valeur de n peut-on affirmer que B_n est une valeur approchée de B à moins de 10^{-4} près ?

Conclure

Exercice 13. Pour tout entier naturel n, on pose

(EDHEC '10)

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

(1) Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.

(2) (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 2$.
(b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).
(c) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leq x$.
(d) En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.

(3) En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [2, \mathrm{e}^2]$.

(4) On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

(a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge et que l'on a

$$\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right).$$

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right).$$

(c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question 3a), que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}.$$

(d) Déduire de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \ell - u_n \leq \ell\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right).$$

(e) Justifier que, pour tout réel x, on a $1-\mathrm{e}^{-x} \leq x$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}.$$

Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

Exercice 14. On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée, donnant pile avec la probabilité $p = 1/2$ et face avec la probabilité $q = 1-p = 1/2$.
On s'intéresse aux successions de lancers amenant un même côté.

On dit que la première série est de longueur k (avec $k \in \mathbb{N}^*$) si les k premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(k+1)$-ième l'autre côté.
De même, la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.
Pour tout i de $\mathbb{N}^*$, on note P_i (resp. F_i) l'événement : " le i-ième lancer amène pile (resp. face) ".
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note N_n la variable aléatoire égale au nombre de séries obtenus lors des n premiers lancers.

Par exemple, si les lancers successifs donnent : $FFPPPPFFPPP\ldots$ (F désignant face et P désignant pile), on a pour une telle succession :

$$N_1 = N_2 = 1; \quad N_3 = \cdots = N_6 = 2; \quad N_7 = N_8 = 3; \quad N_9 = \cdots = N_{11} = 4$$

les données précédentes ne permettant pas de déterminer N_{12}.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  (a) Justifier que $N_n(\Omega) = [\![1;n]\!]$.
  (b) Calculer les probabilités $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.

(2) (a) Déterminer les lois des variables aléatoires N_1 et N_2 et calculer leurs espérances.
  (b) Déterminer la loi de N_3 puis vérifier que $E(N_3) = 2$.

(3) Simulation informatique sous `SciLab`.
  (a) Écrire une fonction `y=lancer(p)` qui simule un lancer d'une pièce en renvoyant 1 si on obtient pile (avec probabilité $p \in]0;1[$) et 0 si on obtient face (avec probabilité $q = 1-p$).
  (b) Compléter la fonction suivante qui, étant donnés un entier n de $\mathbb{N}^*$, simule n lancers de la pièce et renvoie la valeur de N_n obtenue. *On rappelle que dans cet exercice p vaut $1/2$.*

```
function N = Simule_N(n) :
    // Simulation des n lancers stockés dans le vecteur L
    L = zeros(1,n)
    for k = [1:n] do
        L(k) = ............
    end
    // Calcul de la valeur de Nn stockée dans la variable N
    N = .........
    for i = [2:n] do
        if L(......) <> L(......) then
            N = .........
        end
    end
endfunction
```

(4) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout s de $[0;1]$

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)s^k.$$

La fonction G_n s'appelle fonction génératrice de la variable N_n.

(a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $G_n(0)$ et $G_n(1)$.

(b) Montrer que $G_n'(1) = E(N_n)$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant un système complet d'évènements associé à la variable N_n, montrer que :

$$\forall k \in [\![1; n+1]\!], \quad P(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(N_n = k) + \frac{1}{2}P(N_n = k-1).$$

(d) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall s \in [0;1]$,

$$G_{n+1}(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right) G_n(s).$$

(e) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout s de $[0;1]$,

$$G_n(s) = s \cdot \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}.$$

(f) En déduire, à l'aide de la question 4b, que le nombre moyen de séries lors des n premiers lancers est $(n+1)/2$.

(g) On considère la fonction suivante.

```
function EN = Esp_N(n)
    R = zeros(1,10000)
    for j = [1:10000] do
        R(j) = Simule_N(n)
    end
    EN = mean(R)
endfunction
```

Quelle valeur peut-on s'attendre à obtenir lors de l'appel de `Esp_N(10)`?

Exercice 15. *Exercice Inspiré par* **EDHEC 2019**, *série S.*
On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) (a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.
(b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).
(c) En `SciLab`, la commande `rank(M)` renvoie le rang de la matrice M. On a saisi :

```
A=[1,0,0;-2,3,-2;-1,1,0]
r1=rank(A-eye(3,3))
r2=rank(A-2*eye(3,3))
disp(r1,'r1=')
disp(r2,'r2=')
```

`SciLab` a renvoyé :

```
r1 =
     1.
r2 =
     2.
```

Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de f et à la dimension des sous-espaces propres associés?
(d) Donner une base de chacun des sous-espaces propres

$$E_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 Id), \quad \text{et} \quad E_{\lambda_2} = \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 Id).$$

(2) (a) Déterminer, **en justifiant**, une base (u_1, u_2, u_2) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f. On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de u_1 et la première de u_3 étant nulles.

Exercice 16. On considère des variables aléatoires $U = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $V = \max(X_1, \dots, X_n)$ où $(X_1, \dots, X_n)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1; N]\!]$.

(1) Montrer que, pour tout $k \in [\![1; N]\!]$,

$$P(V \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n, \quad \text{puis que} \quad P(V = k) = \left(\frac{1}{N}\right)^n (k^n - (k-1)^n).$$

(2) **Dans toute la suite**, on se place dans le cas $n = 2$.
(a) Déterminer $E(V)$. On **admet** ensuite que que $V(U) = V(V) = \dfrac{(N^2-1)(2N^2+1)}{36N^2}$.
(b) Justifier que $U + V = X_1 + X_2$. En déduire que

$$\mathrm{cov}(U, V) = V(X_1) - V(U).$$

(c) Exprimer $\rho(U, V)$ en fonction de N.

Exercice 17. (Un exercice facile pour se rassurer un peu). On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \quad \text{et pour } n \geq 0, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{1 + u_n}.$$

(1) Introduire une fonction f qu'on étudiera brièvement telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
(2) Montrer que (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.
(3) Montrer que (u_n) est monotone.
(4) En déduire la convergence de (u_n) et préciser sa limite.