ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Quinzaine de colle n°1

Période du 09/09 au 20/09

Semaine du 09/09 au 13/09

Programme

- Révisions
- Exercices **non traités** de la feuille de révisions de rentrée ou du cahier de vacances

Questions de cours

Chaque étudiant.e devrai traiter une de ces questions - choisie au hasard - au tableau. Il est donc nécessaire de les avoir préparées au préalable.

(1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}.$$

(2) On considère la matrice $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer H^2 puis, à l'aide de la formule du binôme, calculer $(I + aH)^n$ (où $a \in \mathbb{R}$)

(3) Justifier la convergence et calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{n(n-1)}{6^n}$.

Planche d'exercices

(1) (*) Soit A une matrice carrée vérifiant l'équation $A^2 - 4A + 3I = 0$. Montrer que A est inversible et exprimer l'inverse de A en fonction de A.

(2) (*) Résoudre le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5x + 2y - z & = & 0 \\ 2x + 2y + 2z & = & 0 \\ -x + 2y + 5z & = & 0 \end{array} \right.$$

(3) (**) On considère deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}$$

(a) On considère la suite (p_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $p_n = u_n + v_n$. Montrer que (p_n) est géométrique. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

(b) À l'aide de la question précédente, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 3v_n + 3^n.$$

(c) Montrer que la suite (z_n), définie pour tout n par $z_n = \dfrac{v_n}{3^n}$, est arithmétique. En déduire l'expression de son terme général.

(d) Donner enfin l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\mathrm{d}x.$$

(a) (*) Justifier que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) (**) À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_0.

(c) (*) Montrer que, pour tout $x \in [0;1]$, $\ln(1+x) \leq x$.

(d) (**) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

puis conclure quant à la convergence de la suite (I_n).

(5) (*) Montrer que la fonction f définie ci-après est une densité de probabilité, avec

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(6) (**) On considère une urne contenant 1 boule numérotée 1, 2 boules numérotées 2, ..., n boules numérotées n. On tire au hasard une boule dans l'urne et on note X le numéro de la boule obtenue. Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$.

(7) (***) On considère la série de terme général $u_k = \dfrac{1}{k+2^k}$.

(a) Justifier que cette série converge. On note S sa somme : $\quad S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{k+2^k}$.

(b) On souhaite déterminer une valeur approchée de S.

(i) Montrer que :

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2^k} - S \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

(ii) Écrire une fonction `SciLab`, d'entête `y=S_approx(eps)` prenant en paramètre un réel `eps` et renvoyant une valeur approchée de S à `eps` près.

(8) (***)

(a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\quad x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

(b) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

(9) (***) Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On effectue n tirages avec remise de la boule dans l'urne. et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues et Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k & \text{si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{ieme} \text{ tirage.} \\ Y = 0 & \text{si les } n \text{ boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

(a) Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.

(b) Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, déterminer la probabilité $P(Y = k)$, puis déterminer $P(Y = 0)$.

(c) Vérifier que : $\sum_{k=0}^{n} P(Y=k)=1$.
(d) Pour $x \neq 1$ et n entier naturel non nul, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}.$$

(e) En déduire $E(Y)$.

Semaine du 16/09 au 20/09

Programme

- Exercices de la semaine précédente, notamment $(6),(7),(8),(9)$.
- Reprise du DS n°0 (possibilité de retravailler sur les exercices **mal ou non** traités lors du DS)
- **Chapitre 1:** fonctions négligeables, fonctions équivalentes, développements limités.

Questions de cours

- On considère la matrice $H=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. Calculer H^2 puis, à l'aide de la formule du binôme, calculer $(I+aH)^n$ (où $a\in\mathbb{R}$)
- Écrire à l'aide des petits-o les relations de croissances comparées.
- Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $1\leq k\leq n$,

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}.$$

En déduire que, si $p\in]0;1[$,

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=np.$$

Planche d'exercices

(1) (*) Comparer

$$(i)\ \sqrt{1+x} \text{ et } \ln(x) \text{ en } +\infty;\qquad (ii)\ x \text{ et } \sqrt{x} \text{ en } 0;\qquad (iii) :\ \frac{1}{x^2} \text{ et } \frac{1}{x\sqrt{x}} \text{ en } 0$$

$$(iv)\ e^{1/x} \text{ et } \ln(x) \text{ en } 0^+;\qquad (v)\ \ln(-x) \text{ et } e^{-x^2} \text{ en } -\infty;$$

$$(vi)\ e^x-1 \text{ et } \frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}-1\right) \text{ en } 0;\qquad (vii)\ e^{2x}-e^x \text{ et } x(x+1) \text{ en } -1.$$

$$(viii)\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \text{ et } ex \text{ en } +\infty.$$

(2) (*) Complétez les équivalents suivants :

$$(i)\ 1-e^{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dots \qquad (ii)\ \ln(1+e^{-x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dots \qquad (iii)\ 1-(1-e^{-x})^n \underset{x\to+\infty}{\sim} \dots$$

$$(iv)\ \frac{x\ln(x)}{x-1} \underset{x\to 1}{\sim} \dots \qquad (v)\ \frac{1}{x^2-1} \underset{x\to 1}{\sim} \dots \qquad (vi)\ \frac{1}{x^2-1} \underset{x\to -1}{\sim} \dots$$

(3) (*) Déterminer un DL à l'ordre 2 au point indiqué

$$(i)\ e^{x^2+x} \text{ en } 0; \qquad (ii)\ \ln(1+e^x) \text{ en } 0; \qquad (iii)\ (x+1)\sqrt{x+1}-1 \text{ en } 0;$$
$$(iv)\ e^{\sqrt{x}} \text{ en } 1; \qquad (v)\ \left(\ln(1+x)\right)^2 \text{ en } 0; \qquad (vi)\ x^2-2x-1 \text{ en } 1.$$

(4) (*) Déterminer un DL d'ordre 2 et en déduire la position relative de la courbe et de la tangente au point considéré

$$(i)\ x \mapsto \frac{e^x+2}{\sqrt{1+x}} \text{ en } 0; \qquad (ii)\ x \mapsto (x+1)^{1/3}-(1-x)^{1/3} \text{ en } 0; \qquad (iii)\ x \mapsto x^2+x+1 \text{ en } 1.$$

(5) (*) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, où

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{x^2}}{\ln(1+x)} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Entrainement DS 1

Partie 1 - Relations matricielles

On considère les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) Exprimer J^2, puis pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, J^n en fonction de J.
(2) En déduire que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \frac{1}{2^n}I + \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)J.$$

Partie 2 - Mouvement aléatoire

Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle, numérotés 1, 2 et 3. À l'instant $n=0$, le mobile se trouve sur le sommet numéroté 1. Si, à l'instant n, il est sur l'un quelconque des trois sommets:

- soit il y reste à l'instant $n+1$, avec une probabilité de $2/3$;
- soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité.

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, X_n la variable aléatoire égale à la position du mobile après n déplacements et

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \\ P(X_n=3) \end{pmatrix}.$$

(1) Faire un *dessin* modélisant les règles de déplacement (ou plutôt le *diagramme de transition*).
(2) Que vaut U_0? Que vaut U_1?.
(3) Déterminer une matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $U_{n+1} = AU_n$. On justifiera soigneusement la question.
(4) Montrer qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = A^n U_0.$$

(5) Utiliser la **Partie 1.** pour déterminer la loi de X_n.
(6) Que vaut $E(X_n)$?