ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Planning de travail

Période du 20 au 24 Avril

Chaque semaine, le planning se décompose entre certains exercices pour s'entraîner à rédiger si possible en temps limité (et qu'il faut donc renvoyer au format pdf **en un seul fichier**), des exercices d'approfondissement (à discuter *oralement* sur Teams - en individuel ou par petits groupes), des questions classiques à savoir refaire en 10-15 minutes chrono. Libre à chacun d'étaler le travail à faire dans la semaine; il est recommandé de faire 1h30 de maths chaque jour (et 1h30 d'une autre matière).

Semaine 1 - Analyse

Exercice 1 (Questions classiques)**.** *Chaque question doit être parfaitement maîtrisée, en 15 minutes maximum. On les refera jusqu'à ce que ce soit le cas.*

(1) Montrer que la fonction f définie ci-dessous est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à la suite d'intégrales (I_n) définie par

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \mathrm{d}t.$$

Justifier la convergence et donner la valeur de I_0. Montrer par récurrence, à l'aide d'une intégration par parties, la convergence de I_n et la relation $I_n = nI_{n-1}$. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

(3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation

$$x^n + x^2 + 4x - 3 = 0$$

a une unique solution x_n sur $\mathbb{R}_+$. Vérifier que $0 < x_n < 3/4$. En déduire que $x_n^n \to 0$. Montrer que (x_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

(4) (*10 minutes*) À l'aide du changement de variable $u = \ln(t)$, donner un critère de convergence (sur α) pour la convergence de l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^\alpha}$$

Exercice 2. (**) Montrer par récurrence et à l'aide d'une intégration par parties que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

Exercice 3 (**À rédiger**, *temps indicatif:* 50 minutes)**.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} \mathrm{d}x.$$

(1) Justifier que la suite (I_n) est bien définie.
(2) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
(3) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n}.$$

(4) Établir, pour tout entier $n \geq 2$

$$\frac{1}{n} \leq 2I_n \leq \frac{1}{n-1}.$$

(5) En déduire un équivalent simple de I_n quand n tend vers l'infini.
(6) Calculer I_1.
(7) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que

$$I_n = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right).$$

(8) Compléter cet autre programme `SciLab` permettant cette fois de calculer et d'afficher la valeur exacte de I_n où n est entré par l'utilisateur

```
n=input('n=?')
I=..................
for k=2:n
    I=.............
end
disp(I)
```

Exercice 4. (*/**)

(1) On considére la fonction g définie pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \ln(x) + 2x + 1$.

 (a) Étudier les variations de g et donner les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.
 (b) En déduire qu'il existe un unique réel α, élément de $]0, 1/e[$ tel que $g(\alpha = 0$.

(2) On considére la fonction de deux variables réelles f définie par:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = x(\ln(x) + x + y^2).$$

 (a) Déterminer le seul point critique de f.
 (b) Vérifier que f présente un minimum local, noté m, en ce point.
 (c) Montrer que $m = -\alpha(\alpha + 1)$

Exercice 5 (**À rédiger**, *temps indicatif:* 1 heure 10 minutes)**.**

On considère la fonction f et la suite (u_n) définies par

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}, \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 & \geq & 0 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$$

(1) **Étude de** f.

(a) Étudier les variations de f et préciser la nature de sa branche infinie.
(b) Résoudre les équation $f(x) = x$ et $f(x) > x$.
(c) Tracer la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$.

(2) **Dans cette question** on suppose que $u_0 = 0$.

(a) Vérifier que (u_n) est bien définie.
(b) Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 1.
(c) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

(3) Dans **toute la suite de l'exercice** on suppose que $u_0 > 1$.

(a) Vérifier que (u_n) est bien définie.
(b) Montrer que la suite (u_n) est monotone.
(c) Étudier la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

(4) **Étude de fonctions auxiliaires.** On définit les fonctions ch et sh par

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

(a) Exprimer la dérivées des fonctions ch et sh en fonction de ch et sh.
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) > 0$.
Calculer $\mathrm{sh}(0)$ et déterminer le signe de $\mathrm{sh}(x)$.

(b) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \geq 0$ tel que $\mathrm{ch}(\alpha) = u_0$.

(5) (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2\left(\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - 1 = \mathrm{ch}(x).$$

(b) En déduire que pour tout entier n

$$u_n = \mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right).$$

(c) Montrer que

$$\mathrm{ch}(x) - 1 = 2\left(\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2.$$

(d) Calculer $\mathrm{sh}'(0)$.
(e) En déduire les équivalences suivantes

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x \to 0}{\sim} x, \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

(f) En déduire un équivalent de $(u_n - 1)$ quand n tend vers $+\infty$.

Approfondissement***

On propose ici un exercice extrait d'une annale de l'oral d'**HEC**.

Soit a un nombre réel strictement positif.
On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont *tous* les termes sont strictement positifs, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\begin{cases} w_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \dfrac{a}{n} \\ \\ \ell_n = \ln(n^a\, u_n) \end{cases}$$

On suppose que la *série* de terme général w_n est absolument convergente.

1. Question de cours : formule de Taylor-Young.

2. Soit f la fonction $t \longmapsto \ln(1+t) - t$.

   a) Préciser le domaine de définition de f et donner un équivalent simple de cette fonction au voisinage de 0.

   b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 1} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ est convergente.

3. Démontrer que les séries $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{w_n}{n}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} (w_n)^2$ sont convergentes.

4. a) Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $\ell_{n+1} - \ell_n = f\left(w_n - \dfrac{a}{n}\right) + w_n + a\, f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

   b) En déduire la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\ell_{n+1} - \ell_n\right)$.

5. a) Justifier la convergence de la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   b) En déduire l'existence d'un réel $A > 0$ tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^a}$.

6. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}$.