ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Planning de travail

Période du 27 au 30 Avril

Chaque semaine, le planning se décompose entre certains exercices pour s'entraîner à rédiger si possible en temps limité (et qu'il faut donc renvoyer au format pdf **en un seul fichier**), des exercices d'approfondissement (à discuter *oralement* sur Teams - en individuel ou par petits groupes), des questions classiques à savoir refaire en 10-15 minutes chrono. Libre à chacun d'étaler le travail à faire dans la semaine; il est recommandé de faire 1h30 de maths chaque jour (et 1h30 d'une autre matière).

Semaine 2 - Probabilités discrètes

Exercice 1 (Questions classiques)**.** *Chaque question doit être parfaitement maîtrisée, en 15 minutes maximum. On les refera jusqu'à ce que ce soit le cas.*

(1) Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Montrer que
$$\min(X,Y) \hookrightarrow \mathcal{G}(1-(1-p)^2).$$
(On commencera par montrer que $P(X \geq k) = (1-p)^{k-1}$.)

(2) Soient $\lambda > 0$, $p \in]0;1[$ et $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. On considère une variable X définie conditionnellement par rapport à N. Plus précisément,
$$\text{sachant } N = n, \qquad X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p).$$
Montrer que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$.

(3) Soit X une v.a. finie telle que $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$. Monter que
$$E(X) = \sum_{j=0}^{n-1} P(X > j).$$

(4) On effectue des tirages **sans remise** d'une boule dans une urne contenant $N-1$ boules blanches et une boule noire. On note X le rang d'apparition de la boule noire. Montrer que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;N]\!])$.

Exercice 2. (**) Soit p un réel de $]0;1[$ et $q = 1 - p$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi de Bernoulli telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X_k = 1) = p, \quad \text{et} \quad P(X_k = 0) = q.$$

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on définit pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la variable aléatoire $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

(1) (a) Calculer pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_{k+1})$.
(b) Montrer que

$$0 < \mathrm{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) < \frac{1}{4}.$$

(2) Calculer, pour tout couple (k,l) tel que $1 \leq k < l \leq n$, $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_l)$.

(3) On note ε un réel strictement positif fixé. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k - 2p\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Exercice 3 (**À rédiger**, *temps indicatif:* 50 minutes)**.** On dispose de trois pièces
- une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" vaut $\frac{1}{2}$;
- une pièce numérotée 1, donnant "pile" à coup sûr;
- une troisième pièce, numérotée 2, donnant "face" à coup sûr.

On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment. Pour tout i de $\{0,1,2\}$, on note A_i l'événement : "on choisit la pièce numérotée i".
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : "on obtient "pile" au lancer numéro k" et on pose $F_k = \overline{P_k}$.

On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire Y , égale au rang d'apparition du premier "face". On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "pile" et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "face".

(1) (a) Déterminer $P(X = 1)$.
(b) Montrer que

$$\forall n \geqslant 2, \qquad P(X = n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(c) En déduire la valeur de $P(X = 0)$.

(2) Montrer que X admet une espérance et la calculer .
(3) Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance. En déduire que X possède une variance et vérifier que

$$V(X) = \frac{4}{3}.$$

(4) Justifier que Y suit la même loi que X.

(5) (a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P([X = 1] \cap [Y = j]) = P([Y = j])$.
(b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P([X = i] \cap [Y = 1]) = P([X = i])$.

(6) Loi de $X + Y$.
(a) Expliquer pourquoi $X + Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.
(b) Montrer que $P(X + Y = 1) = \frac{2}{3}$.
(c) Justifier que , pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$(X + Y = n) = ([X = 1] \cap [Y = n-1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n-1]).$$

(d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :
$$P(X+Y=n)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

(7) On rappelle que, pour tout entier naturel m, l'instruction `grand(1,1,'uin',0,m)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et m (ceci de façon équiprobable). On décide de coder "pile" par 1 et "face" par 0.

(a) Compléter le script `SciLab` suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
piece = grand(1,1,'uin', ........, ........)
x=0
if piece==0 then
    lancer=grand(1,1,'uin', ......, ......)
    while lancer==0
        lancer=.........
        x=..........
    end
else
    if piece==1 then
        x=.........
    end
end
disp(x)
```

(b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

Exercice 4. (***) Soient n un entier strictement positif et $\lambda>0$ avec $\lambda<n$.

(1) Soit $(Y_1,....,Y_n)$ un $n-$échantillon de $\mathcal{P}(\lambda/n)$. Donner sans démonstration la loi de $\sum_{i=1}^n Y_i$.
(2) Vérifier que, pour tout $x\in[0;1]$, $f(x)=1-(1-x)e^x\in[0;1]$.

Soit $(U_1,...,U_n)$ un $n-$échantillon de $\mathcal{B}\left(f(\lambda/n)\right)$ tel que les variables U_i sont indépendantes des variables Y_i. Pour $i\in[\![1;n]\!]$, on pose
$$X_i=\begin{cases}0, & \text{si } U_i=Y_i=0\\ 1, & \text{sinon}\end{cases}$$

(3) Vérifier que pour tout $i\in[\![1;n]\!]$, X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre λ/n et donner la loi de $\sum_{i=1}^n X_i$.
(4) Montrer que
$$\sum_{i=1}^n X_i\xrightarrow{\mathcal{L}}Z,\qquad Z\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda).$$
(5) Montrer que, pour tout $i\in[\![1;n]\!]$,
$$P(X_i\neq Y_i)\leq\frac{\lambda^2}{n^2}$$
(On pourra établir et utiliser que $1+x\leq\exp(x)$.)
(6) Montrer que
$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i\neq\sum_{i=1}^n Y_i\right)\leq P\left(\bigcup_{i=1}^n[X_i\neq Y_i]\right)\leq\frac{\lambda^2}{n}.$$