ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Planning de travail

Période du 4 au 8 Mai

Chaque semaine, le planning se décompose entre certains exercices pour s'entraîner à rédiger si possible en temps limité (et qu'il faut donc renvoyer au format pdf **en un seul fichier**), des exercices d'approfondissement (à discuter *oralement* sur Teams - en individuel ou par petits groupes), des questions classiques à savoir refaire en 10-15 minutes chrono. Libre à chacun d'étaler le travail à faire dans la semaine; il est recommandé de faire 1h30 de maths chaque jour (et 1h30 d'une autre matière).

Semaine 3 - Algèbre Linéaire

Exercice 1 (Questions classiques)**.** *Chaque question doit être parfaitement maîtrisée, en 15 minutes maximum. On les refera jusqu'à ce que ce soit le cas.*

(1) On considère la matrice
$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
  (a) Calculer U^2 et l'exprimer en fonction de U et I_4.
  (b) En déduire le spectre de U et une base de chaque sous-espace propre.

(2) Soit f un endomorphisme non nul d'un espace vectoriel E de dimension 3 tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Soit u un vecteur tel que
$$u \notin \mathrm{Ker}(f^2).$$
Montrer que $(u, f(u), f^2(u))$ est une base de E.

(3) On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_2[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme Q défini par
$$Q(X) = \int_0^1 2tP(X+t)\mathrm{d}t.$$

Déterminer la matrice de φ dans la base canonique ainsi que ses valeurs propres. L'endomorphisme est-il diagonalisable?

Exercice 2. (*/**) À quelle condition sur $m \in \mathbb{R}$ la matrice M ci-dessous admet-elle deux valeurs propres distinctes? À quelle condition est-elle diagonalisable?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. (***) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère un vecteur v **fixé** de $\mathbb{R}^3$.
On considère également l'application f qui à tout vecteur $u = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$ associe le vecteur $f(u)$ définie par :

$$f(u) = u - (a + b + c)v$$

(1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(2) **Étude d'un cas particulier.** Dans cette question 3 seulement, on suppose que $v = (2, -1, 0)$.
  (a) Vérifier que $f(v) = 0$. f est-il un automorphisme ?
  (b) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
  (c) On note $w = (-1, 1, 0)$ et $z = (0, -1, 1)$. Montrer que la famille (w, z) est également une base de $\mathrm{Im}(f)$.
  (d) En déduire, sans calculs supplémentaires, une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
  (e) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v, w, z)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
  (f) Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ puis dans la base $\mathcal{C}$.

(3) **Retour au cas général.** On suppose maintenant que $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ vérifie $\alpha + \beta + \gamma = 1$.
  (a) Montrer que $f(v) = 0$.
  (b) En déduire que $f \circ f = f$.
  (c) Montrer que le vecteur y appartient à $\mathrm{Im}(f)$ **si et seulement si** $f(y) = y$.
  (d) En déduire que les vecteurs $e_2 - e_1$ et $e_3 - e_2$ appartiennent à $\mathrm{Im}(f)$.
  (e) Déduire de la question 3a que $\mathrm{rg}(f) \leq 2$.
  (f) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
  (g) Déterminer, en fonction de (α, β, γ) la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Cette matrice est-elle inversible ?
  (h) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v, e_2 - e_1, e_3 - e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer la matrice de f dans cette base.

Exercice à rédiger

Temps indicatif: 1h20 minutes

On dit qu'une matrice A carrée de taille n est une matrice nilpotente s'il existe un entier naturel k non nul tel que :

$$A^{k-1} \neq 0_n \quad \text{et} \quad A^k = 0_n,$$

où 0_n représente la matrice carrée nulle d'ordre n. Soit A une matrice carrée de taille n, on dit que le couple (Δ, N) est une *décomposition de Dunford* de A lorsque :

$$\begin{cases} \Delta \text{ est un matrice diagonalisable} \\ N \text{ est une matrice nilpotente} \\ \Delta N = N\Delta \text{ et } A = N + \Delta \end{cases}$$

(1) On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.

Dans toute la suite de l'exercice, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) (a) Déterminer les valeurs propres de A.
(b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

(3) On considère les matrices colonnes

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer les produits ΔX_1, ΔX_2 et ΔX_3.
(b) Justifier que la matrice Δ est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible telle que $P^{-1}\Delta P = D$.

(4) (a) Établir que N est une matrice nilpotente.
(b) Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de la matrice A.
(c) En utilisant une formule bien connue, donner l'expression de A^n en fonction des puissances de Δ, de N et de n.
(d) Établir que, pour tout entier naturel $k \geq 1$, $\Delta^k N = N$.
(e) Proposer une décomposition de Dunford de A^n.

Approfondissement

Exercice 5. *Les questions sont indépendantes*

(1) Soient E un espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes qui commutent. Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables sous l'action de v.

(2) Soient $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $F = \mathrm{Vect}(u, v)$. Trouver un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\mathrm{Ker}(f) = F$.

(3) Soient E un espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que $f^3 = f$. On note

$$F = \mathrm{Ker}(f), \qquad G = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}), \qquad H = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}).$$

Montrer que les trois sous-espaces ci-dessus ont des intersections deux à deux réduites au vecteur nul. Montrer ensuite que

$$\forall u \in E, \qquad \exists (v, w, z) \in F \times G \times H, \qquad u = v + w + z.$$

Exercice 6. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$. On considère un endomorphisme f de E tel que

$$f^2 = -\mathrm{Id}.$$

(1) Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \emptyset$

(2) (a) Soit $u \in E$, $u \neq 0$. Montrer, par l'absurde, que la famille $(u, f(u))$ est libre.
(b) Montrer que le sous-espace $F_u = \mathrm{Vect}(u, f(u))$ est *stable* sous l'action de f, c'est à dire que

$$\forall x \in F_u,\ f(x) \in F_u.$$

(3) Dans cette question uniquement on considère le cas $n = 2$.
(a) Donner, en exhibant une matrice qui représenterait f dans la base canonique, un exemple d'un tel endomorphisme.
(b) À l'aide de la question 2a, montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f présente des 0 sur la diagonale. Expliciter la matrice trouvée.

(4) On revient au cas général. On suppose[1] que $n = 2k$ est pair.
(a) On suppose qu'il existe, pour un certain $i \in [\![1; k-1]\!]$, des vecteurs $(u_1, u_2, ..., u_i)$ tels que la famille

$$(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), ..., u_i, f(u_i))$$

est libre. Montrer qu'il existe un vecteur u_{i+1} tel que la famille

$$(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), ..., u_i, f(u_i), u_{i+1}, f(u_{i+1}))$$

est encore libre.
(b) En déduire l'existence d'une base dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

[1] En fait, il est possible de montrer que c'est nécessaire