ECE 2 - Année 2019-2020
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Planning de travail

Période du 11 au 15 Mai

Chaque semaine, le planning se décompose entre certains exercices pour s'entraîner à rédiger si possible en temps limité (et qu'il faut donc renvoyer au format pdf **en un seul fichier**), des exercices d'approfondissement (à discuter *oralement* sur Teams - en individuel ou par petits groupes), des questions classiques à savoir refaire en 10-15 minutes chrono. Libre à chacun d'étaler le travail à faire dans la semaine; il est recommandé de faire 1h30 de maths chaque jour (et 1h30 d'une autre matière).

Semaine 4 - Variables à densité

Exercice 1 (Questions classiques)**.** *Chaque question doit être parfaitement maîtrisée, en 15 minutes maximum. On les refera jusqu'à ce que ce soit le cas.*

(1) Soient $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que
$$V = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).$$
(2) Soient $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un $n-$échantillon de $\mathcal{U}([0;1])$ et $M_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F_n de M_n. En déduire que M_n est une variable à densité, et préciser une densité.
   (b) Déterminer $E(M_n)$.
   (c) Montrer que M_n converge en loi vers une variable aléatoire à préciser.

(3) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que
$$\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t \geq \sqrt{2\pi}\left(1-\frac{1}{2x^2}\right).$$
(4) Soit (X_n) une suite v.a.i.i.d, où $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$. Montrer que
$$\sqrt{\frac{12}{n}}\sum_{k=1}^{n} X_n - \sqrt{3n} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z, \quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Exercice 2. (*/**) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-|x|}, & \text{si } -\ln 2 \leq x \leq \ln 2 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(1) Etudier les variations de f et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

(2) Montrer que f est une densité de probabilité.

(3) Soit X une variable aléatoire réelle admettant f comme densité.
  (a) Déterminer la fonction de répartition F de X.
  (b) Montrer que X admet une espérance et calculer l'espérance de X.
  (c) On pose $Y = |X|$.
  Déterminer la fonction de répartition G de Y. Montrer que Y est une variable à densité et déterminer une densité g de Y.

Exercice 3. (**[**À rédiger**], *temps indicatif:* 1h)

(1) Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} \mathrm{d}x$$

est convergente et donner sa valeur.

(2) On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}.$$

  (a) Montrer que f est paire.
  (b) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ admettant f comme densité. On note F la fonction de répartition de X.

(3) On pose $Y = \ln(1+|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.
  (a) Déterminer $Y(\Omega)$
  (b) Exprimer la fonction de répartition G de Y à l'aide de F.
  (c) En déduire que Y admet pour densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2e^x f(e^x - 1), & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

  (d) Montrer enfin que Y suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.

Exercice 4. (***) Soit (X_n) une suite v.a.i.i.d de loi commune $\mathcal{U}(]0;1])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$Y_n = e^{\sqrt{n}} \left(\prod_{k=1}^{n} X_i \right)^{1/\sqrt{n}}, \qquad L_n = \ln(Y_n).$$

(1) Déterminer la loi de $-\ln(X_1)$. En déduire $E(\ln(X_1))$ et $V(\ln(X_1))$.
(2) À l'aide du TCL, montrer que (L_n) converge en loi vers une variable dont on donnera la loi.
(3) (a) Que vaut $Y_n(\Omega)$?
  (b) Soit $t < 0$. Que vaut $\lim_{n\to+\infty} P(Y_n \leq t)$?

(4) On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ \Phi(\ln(x)), & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z.
(b) Montrer que (Y_n) converge en loi vers Z.

Exercice 5. (**/***[**À rédiger**], *temps indicatif:* 50 minutes)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle à densité suit une loi de Laplace de paramètre (α, β), notée $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$, si elle admet comme densité la fonction f donnée par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|t-\alpha|}{\beta}\right)$$

(1) Vérifier que f est bien une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle.
(2) Déterminer la fonction de répartition, notée Ψ, de la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.
(3) On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.
  (a) Montrer que $\beta X + \alpha$ suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.
  (b) En déduire la fonction de répartition de la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

(4) *Espérance et variance.*
  (a) On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.
  Montrer que $E(X)$ et $V(X)$ existent et valent respectivement 0 et 2.
  (b) En déduire l'existence et les valeurs de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire réelle qui suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

(5) *Simulation à partir d'une loi exponentielle.*
Soit U une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1 et V une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et indépendante de U.

  (a) En utilisant le système complet naturellement associé à V, montrer que $X = (2V-1)U$ suit la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.
  (b) Compléter la définition `SciLab` ci-dessous pour que la fonction ainsi définie réalise la simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$:

```
function r = Laplace(alpha,beta)
if ......... <= 1/2
  V = 1
else
  V = 0
end
X = (2*V - 1) * grand(1, 1, "exp", 1)
r = ...........
endfunction
```

Approfondissement

Exercice 6. (****)
Soit $\varepsilon > 0$. On dit que (X, Y), un couple de variables aléatoires, est un couple ε-différentiel si, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{-\varepsilon} P([X \in I]) \leq P([Y \in I]) \leq \mathrm{e}^{\varepsilon} P([X \in I])$$

Intuitivement, les lois de X et Y seront d'autant plus proches que le plus petit ε tel que (X, Y) soit un couple ε-différentiel est proche de 0.

(1) Soit (X, Y, Z) un triplet de variables aléatoires réelles.
 (a) Montrer que si (X, Y) est ε-différentiel alors (Y, X) l'est aussi.
 (b) Montrer que si (X, Y) est ε-différentiel et (Y, Z) est ε'-différentiel alors (X, Z) est $(\varepsilon + \varepsilon')$-différentiel.

(2) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes. On suppose que $X(\Omega) \cup Y(\Omega) = \{z_n / n \in J\}$ où J est un sous ensemble non vide de $\mathbb{N}$.

 Montrer que (X, Y) est ε-différentiel si et seulement si

$$\forall n \in J, \quad \mathrm{e}^{-\varepsilon} P([X = z_n]) \leq P([Y = z_n]) \leq \mathrm{e}^{\varepsilon} P([X = z_n])$$

(3) *Premier exemple.*
 Dans cette question, on suppose que X suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$, Z suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ et elles sont indépendantes. On pose $Y = X + Z$.

 (a) Déterminer la loi de Y.
 (b) Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$1 - p \leq \frac{P([Y = k])}{P([X = k])} \leq \frac{1}{1 - p}.$$

 (c) En déduire que (X, Y) est $-\ln(1 - p)$-différentiel.
 (d) Que ce passe-t-il lorsque p s'approche de 0 ou lorsqu'il s'approche de 1? Était-ce prévisible?

(4) On suppose que X et Y sont deux variables à densité de densités respectives f et g et de fonction de répartition F et G.

 (a) On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-\varepsilon} f(t) \leq g(t) \leq \mathrm{e}^{\varepsilon} f(t)$.
 Montrer que (X, Y) est ε-différentiel.
 (b) On suppose dans la suite de cette question que (X, Y) est ε-différentiel.
 Soit $h > 0$ et $t \in \mathbb{R}$ où f et g sont continues.

 Montrer que:

$$\mathrm{e}^{-\varepsilon} \frac{F(t + h) - F(t)}{h} \leq \frac{G(t + h) - G(t)}{h} \leq \mathrm{e}^{\varepsilon} \frac{F(t + h) - F(t)}{h}$$

 En conclure que

$$\mathrm{e}^{-\varepsilon} f(t) \leq g(t) \leq \mathrm{e}^{\varepsilon} f(t).$$

(5) *Deuxième exemple: lois de Cauchy.*
 (a) Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 1} \mathrm{d}t$$

 converge. On admet que cette intégrale est égale à π.
 (b) On définit, pour $a > 0$, la fonction f_a sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_a(t) = \frac{a}{\pi(t^2 + a^2)}.$$

 Montrer que f_a est une densité de probabilité d'une variable aléatoire à densité.
 (c) On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires admettant comme densités respectives f_1 et f_a avec $a > 1$. Montrer que (X, Y) est $\ln(a)$-différentiel.

(6) *Une première interprétation.*

On suppose que (X, Y) est un couple ε-différentiel et que U est une variable de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ indépendante de X et Y.

On définit la variable aléatoire Z par:

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } U(\omega) = 1 \\ Y(\omega) & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ telle que $P([Z \in I]) \neq 0$.
Montrer que :

$$P_{[Z\in I]}([U = 1]) = p \, \frac{P([X \in I])}{pP([X \in I]) + (1 - p)P([Y \in I])}.$$

En déduire que:

$$\frac{p}{p + (1 - p)\mathrm{e}^{\varepsilon}} \leq P_{[Z\in I]}([U = 1]) \leq \frac{p}{p + (1 - p)\mathrm{e}^{-\varepsilon}}$$

(b) Si ε est proche de zéro, le fait de disposer d'une information sur la valeur de Z change-t-il notablement le paramètre de la loi de U et par conséquent la probabilité d'en déduire la valeur prise par U?