Planning de travail

Période du 18 au 12 Mai

Semaine 5 - `SciLab`

Cette semaine, le planning concerne (toujours de manière non-exhaustive) les compétences de programmation sous `SciLab`. On pourra toujours échanger à ce propos sur Teams, et on enverra en fin de semaine l'ensemble des programmes écrits.

Exercice 1 (Questions classiques)**.** *Chaque question doit être parfaitement maîtrisée, en 10 minutes maximum. On les refera jusqu'à ce que ce soit le cas.*

(1) On considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence

$$u_0 = \frac{1}{2}, \qquad u_{n+1} = u_n^2 - u_n \ln(u_n).$$

On admet que (u_n) est croissante et converge vers 1. Écrire un programme sous `SciLab` qui calculer et affiche un entier N tel que

$$1 - u_N < 10^{-4}.$$

(2) On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges. On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante: on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la couleur de celle qui vient d'être obtenue.
Écrire, en `SciLab`, une fonction d'en-tête `function s=tirage(n)` qui simule l'expérience étudiée et renvoie le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages, n étant l'entier entré en argument.

(3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$.
Écrire un programme permettant de représenter graphiquement f sur le domaine $[-4;4]^2$. Conjecturer quant à la présence d'extremums ou de points selles. Proposer un autre programme, en expliquant, permettant de *localiser* plus précisément les éléments de la conjecture précédente.

(4) Proposer un programme, en expliquant en parallèle la méthode, permettant de donner une valeur approchée de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

(5) Écrire un programme permettant de calculer le terme u_n où la suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad \text{et} \quad u_{n+2} = \frac{7}{2}u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n.$$

Représenter graphiquement les 50 premiers termes de la suite $(u_n/3^n)$ et émettre une conjecture sur un équivalent de u_n.

Exercice 2. Une guirlande électrique est composée de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3, S_4 et change d'état de la manière suivante:

- à l'instant $t = 0$, le spot S_1 est allumé;
- si, à l'instant $t = n$ le spot S_1 est allumé, alors un (et un seul) des spots s'allume à l'instant $t = n + 1$, et ceci de manière équiprobable;
- si, à l'instant $t = n$ le spot S_k $(2 \le k \le 4)$ est allumé, le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t = n+1$.

On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note X la variable aléatoire représentant le premier instant où le spot S_2 s'allume.

(1) Écrire une fonction `y=spot2()` qui simule la variable aléatoire X.

(2) Écrire un programme qui simule 1000 fois la variable X et représenter le diagramme à bâtons des fréquences des valeurs obtenues. Conjecturer quant aux valeurs de $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$ et donner une estimation de $E(X)$.

(3) Déterminer la loi de X. Montrer que X admet une espérance et la calculer. Comparer avec l'estimation précédente.

Exercice 3. José se rend au casino *Les requins de la côte* avec s euros en poche ($s \in \mathbb{N}^\star$) et l'envie de faire fortune. Après s'être vêtu de ses habits de lumière, il s'installe à une table où, à chaque partie, il gagne avec probabilité $p \in]0;1[$ un euro et perd avec probabilité $q = 1 - p$ un euro.

On note N la somme dont dispose le casino (on peut raisonnablement supposer que $s < N$). José décide qu'il arrêtera de jouer s'il devient ruiné (c'est à dire lorsque sa fortune tombe à 0) ou lorsque ce sera le cas pour le casino. On s'intéresse à la probabilité que José soit ruiné.

(1) Compléter la fonction suivante qui simule et représente la trajectoire de la fortune de José un soir de jeu, et la faire tourner dans `SciLab`. Qu'observe-t-on à chaque fois? (José jouera sûrement à la roulette américaine donc avec $p = 18/38$.)

```
function []=casino(n,N,p)
    k=1;
    fortune(k)=n; //argent de José au moment k=1
    tresor(k)=N; //réserves du casino au moment k=1
    while ................................
        r=rand();
        if ......................
            fortune(k+1)=..................
            tresor(k+1)=...................
        else
            .........................
            .........................
        end
        k=k+1;
    end
    plot2d(1:k, fortune, -1)
endfunction
```

(2) **Étude d'une suite récurrente**

On s'intéresse à la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_N = 0, \quad \text{et} \quad u_n = qu_{n-1} + pu_{n+1} \quad (n \geq 1).$$

Exprimer u_n en fonction de n, p et q (on pourra différencier $p = q = 1/2$ et $p \neq 1/2$).

(3) **La ruine du joueur**

Pour $k \in [\![0; N]\!]$, on note E_k l'évènement "à un certain moment, la fortune de José atteint k euros mais la partie s'arrête car ce dernier est ruiné". Ainsi, on cherche à calculer $P(E_s)$.

(a) Justifier que $P(E_0) = 1$ et $P(E_N) = 0$.

(b) Montrer que, pour $k \in [\![1; N-1]\!]$,

$$P(E_k) = qP(E_{k-1}) + pP(E_{k+1}).$$

(c) En déduire $P(E_s)$ en fonction de s, p, q et N.

(d) Exprimer également la probabilité que le jeu s'arrête car José a plumé le casino.

(e) Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête?

(f) Comment interpréter ces résultats? Que José joue à la roulette américaine ou à *Pile ou Face* change-t-il quelque chose?

Exercice 4. On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec probabilité p. On note $q = 1 - p$.
On dit que la première série est de longueur $n \geq 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ième l'autre côté. De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine au lancer précédant un changement de côté.

Par exemple si les lancers donnent les résultats $FFPPPPPPFFFPP\ldots$ alors la première série est de longueur 2 et la deuxième est de longueur 6.
Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux longueurs de la première et deuxième série.

(1) Recopier et compléter la fonction suivante, prenant en argument la probabilité p d'obtenir pile et permettant de simuler la variable aléatoire X_1.

```
function X=longueur(p)
    X=1;
    told=grand(1,1,'bin', ....., .....)
    tnew=grand(1,1,'bin', ....., .....)
    while ............
        X=................
        told=tnew;
        tnew=.............
    end
endfunction
```

(2) Écrire une fonction d'entête `function U=SampleX1(N,p)` permettant d'obtenir un $N-$échantillon de X_1, c'est à dire un vecteur ligne U de taille N dont chaque composante est une réalisation de la variable X_1.

(3) Écrire un script permettant de comparer graphiquement les fréquences des valeurs obtenues sur un échantillon de taille 1000 de X_1 et les valeurs théoriques de la loi géométrique de paramètre $1/2$. Commenter.